EGZAMIN ÓSMOKLASISTY
Vademecum nauczyciela

MATEMATYKA

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY
Vademecum nauczyciela

MATEMATYKA

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Warszawa 2018

Zespół autorów:
Józef Daniel, Elżbieta Rzepecka, Edyta Warzecha, Aneta Zawada

Redakcja merytoryczna:
Józef Daniel

Redakcja i korekta:
„Altix" Sp. z o.o.

Redakcja techniczna i skład:
„Altix" Sp. z o.o.

Projekt okładki, opracowanie graficzne:
Wojciech Romerowicz

Elementy graficzne:
© julimur/Fotolia.com, © Chinnapong/Fotolia.com

ISBN 978-83-66047-17-4

Warszawa 2018
Wydanie I

Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl
tel. 22 345 37 00
fax 22 345 37 70

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Oddajemy w Państwa ręce publikację, której celem jest przybliżenie najważniejszych założeń reformy edukacji w szkole podstawowej. W wyniku zmian, zarówno strukturalnych, jak i programowych, nastąpiła przebudowa ustroju szkolnego (art. 18 ustawy Prawo oświatowe) oraz podstaw programowych, czego konsekwencją jest stworzenie nowej koncepcji egzaminu kończącego ośmioletnią szkołę podstawową.

Podstawa programowa za cele edukacji w ośmioklasowej szkole podstawowej wyznacza m.in. ukazywanie wartości wiedzy jako podstawy do rozwoju umiejętności; rozbudzanie ciekawości poznawczej uczniów oraz motywacji do nauki; wyposażenie uczniów w taki zasób wiadomości oraz kształtowanie takich umiejętności, które pozwalają w sposób bardziej dojrzały i uporządkowany zrozumieć świat; wspieranie ucznia w rozpoznawaniu własnych predyspozycji i określaniu drogi dalszej edukacji; wszechstronny rozwój osobowy ucznia. Natomiast za jedno z zasadniczych zadań ośmioklasowej szkoły podstawowej uznaje się przygotowanie uczniów do samodzielnej pracy, tj. umiejętności poszukiwania, porządkowania, krytycznej analizy oraz wykorzystania informacji z różnych źródeł. Założenia te znalazły odzwierciedlenie w koncepcji egzaminu ósmoklasisty z różnych przedmiotów.

Vademecum ósmoklasisty zawiera:

a. podstawę programową do szkoły podstawowej wraz z komentarzem,
b. założenia egzaminu ósmoklasisty wraz z przykładami zadań egzaminacyjnych,
c. wybrane zagadnienia, ważne w procesie kształcenia oraz obecne w arkuszu egzaminacyjnym, wraz z propozycją rozwiązań metodycznych.

Przygotowany materiał ma wspierać nauczycieli w pracy w zreformowanej szkole. Podpowiada rozwiązania metodyczne i – mamy nadzieję – okaże się ciekawym, inspirującym i pomocnym poradnikiem w pracy dydaktycznej.

dr Wioletta Kozak

PODSTAWA PROGRAMOWA

Preambuła

Matematyka jest nauką, która dostarcza narzędzi do poznawania środowiska i opisu zjawisk, dotyczących różnych aspektów działalności człowieka. Funkcjonowanie w konkretnych sytuacjach życiowych, rozwiązywanie typowych i nietypowych problemów, którym trzeba stawić czoła w różnych etapach życia, staje się łatwiejsze dzięki umiejętnościom kształconym przez matematykę. Podejmowanie właściwych decyzji, organizacja własnych działań czy precyzyjne porozumiewanie się często są niemożliwe bez umiejętności matematycznych. Znaczenie matematyki dla indywidualnego rozwoju jest nie do przecenienia.

Nauczanie matematyki w szkole powinno być dostosowane do konkretnego etapu rozwojowego i możliwości intelektualnych uczniów. Na I etapie edukacyjnym nauczanie matematyki powinno być organizowane w taki sposób, by uczniowie koncentrowali się na odniesieniach do znanej sobie rzeczywistości, a stosowane pojęcia i metody powinny być powiązane z obiektami, występującymi w znanym środowisku. Uczniowie muszą mieć szansę na stosowanie kształconych umiejętności w sytuacjach konkretnych, a poszukiwanie odpowiedzi na stawiane pytania powinno pomóc im w organizowaniu własnej nauki i osiąganiu nowych możliwości działania. Ostatnie lata szkoły podstawowej to w przypadku matematyki czas na wprowadzenie takich pojęć i własności, które pozwolą na doskonalenie myślenia abstrakcyjnego, a w konsekwencji na naukę przeprowadzania rozumowań i poprawnego wnioskowania w sytuacjach nowych, a także dotyczących zagadnień złożonych i nietypowych.

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Sprawność rachunkowa.
   1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.
   2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
   1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.
   2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.
   3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.
3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

Klasy IV–VI

I. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:
1) ~~zapisuje i odczytuje liczby naturalne wielocyfrowe~~;
2) ~~interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej~~;
3) ~~porównuje liczby naturalne~~; < > ≥ ≤ =
4) zaokrągla liczby naturalne;
5) liczby w zakresie do 3 000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim.

II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe, liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;
2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora;
3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) ~~i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach)~~; 1 2 3 4
4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;
5) stosuje wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania; 1 5
6) porównuje liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu;
7) rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100;

8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności;
9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;
10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;
11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
12) szacuje wyniki działań;
13) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) w sytuacjach nie trudniejszych niż typu NWD(600, 72), NWD(140, 567), NWD(10000, 48), NWD(910, 2016) oraz wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki;
14) rozpoznaje wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone;
15) odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać;
16) rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;
17) wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby a przez liczbę b i zapisuje liczbę a w postaci: $a = b \cdot q + r$.

III. Liczby całkowite. Uczeń:
1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;
2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;
3) oblicza wartość bezwzględną;
4) porównuje liczby całkowite;
5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:
1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;
2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły;
3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;
4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;
5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego;
6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;
7) zaznacza i odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;
8) zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych;

9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie lub skracanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);
10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
11) zaokrągla ułamki dziesiętne;
12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne);
13) oblicza liczbę, której część jest podana (wyznacza całość, z której określono część za pomocą ułamka);
14) wyznacza liczbę, która powstaje po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część innej liczby.

V. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:
1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszych), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych);
3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;
4) porównuje ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;
5) oblicza ułamek danej liczby całkowitej;
6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
7) oblicza wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;
9) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych, także wymiernych ujemnych o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie:

$$-\frac{1}{2}:0,25+5,25:0,05-7\frac{1}{2}\cdot\left(2,5-3\frac{2}{3}\right)+1,25$$

VI. Elementy algebry. Uczeń:
1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisuje wzór słowami;
2) stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym, na przykład zapisuje obwód trójkąta o bokach: a, $a + 2$, b; rozwiązuje równania

pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (przez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego), na przykład $\frac{x-2}{3}=4$.

VII. Proste i odcinki. Uczeń:

1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;
2) rozpoznaje proste i odcinki prostopadłe i równoległe, na przykład jak w sytuacji określonej w zadaniu:
   Odcinki *AB* i *CD* są prostopadłe, odcinki *CD* i *EF* są równoległe oraz odcinki *EF* i *DF* są prostopadłe. Określ wzajemne położenie odcinków *DF* oraz *AB*. Wykonaj odpowiedni rysunek;
3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych;
4) mierzy odcinek z dokładnością do 1 mm;
5) znajduje odległość punktu od prostej.

VIII. Kąty. Uczeń:

1) wskazuje w dowolnym kącie ramiona i wierzchołek;
2) mierzy z dokładnością do 1° kąty mniejsze niż 180°;
3) rysuje kąty mniejsze od 180°;
4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
5) porównuje kąty;
6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i przyległe oraz korzysta z ich własności.

IX. Wielokąty, koła i okręgi. Uczeń:

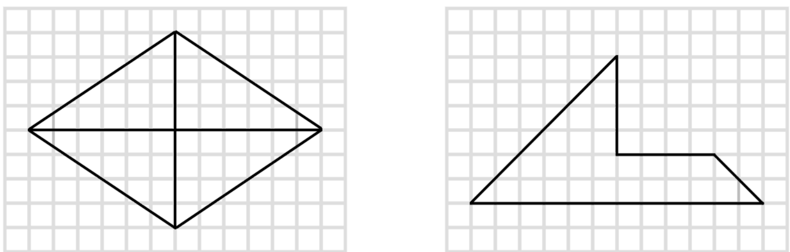
1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;
2) konstruuje trójkąt o danych trzech bokach i ustala możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta;
3) stosuje twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta;
4) rozpoznaje i nazywa: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez;
5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu, rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje osie symetrii figur;
6) wskazuje na rysunku cięciwę, średnicę oraz promień koła i okręgu;
7) rysuje cięciwę koła i okręgu, a także, jeżeli dany jest środek okręgu, promień i średnicę;
8) w trójkącie równoramiennym wyznacza przy danym jednym kącie miary pozostałych kątów oraz przy danych obwodzie i długości jednego boku długości pozostałych boków.

X. Bryły. Uczeń:

1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;

2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościany i sześciany i uzasadnia swój wybór;
3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;
4) rysuje siatki prostopadłościanów;
5) wykorzystuje podane zależności między długościami krawędzi graniastosłupa do wyznaczania długości poszczególnych krawędzi.

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;
2) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, na przykład pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm;
3) stosuje jednostki pola: mm^2, cm^2, dm^2, m^2, km^2, ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
4) oblicza pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełniania do większych wielokątów jak w sytuacjach:



5) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;
6) stosuje jednostki objętości i pojemności: mililitr, litr, cm^3, dm^3, m^3;
7) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.

XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:
1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną części danej wielkości liczbowej;
2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 20%, 10%;
3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;
4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;
5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną);
6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr;
7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, dekagram, kilogram, tona;

8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;
9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.

XIII. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:
1) gromadzi i porządkuje dane;
2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach, na przykład: wartości z wykresu, wartość największą, najmniejszą, opisuje przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach zjawiska przez określenie przebiegu zmiany wartości danych, na przykład z użyciem określenia „wartości rosną", „wartości maleją", „wartości są takie same" („przyjmowana wartość jest stała").

XIV. Zadania tekstowe. Uczeń:
1) czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe;
2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;
3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;
4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;
5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;
6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku;
7) układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązanym zadaniu.

KLASY VII i VIII

I. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń:
1) zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;
2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;
3) mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;
4) podnosi potęgę do potęgi;
5) odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy k jest liczbą całkowitą $1 \leq a < 10$.

II. Pierwiastki. Uczeń:

1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych;
2) szacuje wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub sześciennego oraz wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki; np. $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$
3) porównuje wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajduje liczby wymierne większe lub mniejsze od takiej wartości, na przykład znajduje liczbę całkowitą a taką, że: $a \leq \sqrt{137} < a+1$;
4) oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka;
5) mnoży i dzieli pierwiastki tego samego stopnia.

III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń:

1) zapisuje wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
4) zapisuje rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych jak w przykładzie: Bartek i Grześ zbierali kasztany. Bartek zebrał n kasztanów, Grześ zebrał 7 razy więcej. Następnie Grześ w drodze do domu zgubił 10 kasztanów, a połowę pozostałych oddał Bartkowi. Ile kasztanów ma teraz Bartek, a ile ma Grześ?

IV. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich. Uczeń:

1) porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym);
2) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych;
3) mnoży sumy algebraiczne przez jednomian i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany;
4) mnoży dwumian przez dwumian, dokonując redukcji wyrazów podobnych.

V. Obliczenia procentowe. Uczeń:

1) przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości;
2) oblicza liczbę a równą p procent danej liczby b;
3) oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a;
4) oblicza liczbę b, której p procent jest równe a;
5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości.

VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:

1) sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą, na przykład sprawdza, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -8 są rozwiązaniami równania $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$;
2) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych;
3) rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi;
5) przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu).

VII. Proporcjonalność prosta. Uczeń:

1) podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych,
2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej, na przykład wartość zakupionego towaru w zależności od liczby sztuk towaru, ilość zużytego paliwa w zależności od liczby przejechanych kilometrów, liczby przeczytanych stron książki w zależności od czasu jej czytania;
3) stosuje podział proporcjonalny.

VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

1) zna i stosuje twierdzenie o równości kątów wierzchołkowych (z wykorzystaniem zależności między kątami przyległymi);
2) przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe;
3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych;
4) zna i stosuje cechy przystawania trójkątów;
5) zna i stosuje własności trójkątów równoramiennych (równość kątów przy podstawie);
6) zna nierówność trójkąta $AB + BC \geq AC$ i wie, kiedy zachodzi równość;
7) wykonuje proste obliczenia geometryczne wykorzystując sumę kątów wewnętrznych trójkąta i własności trójkątów równoramiennych;
8) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego);
9) przeprowadza dowody geometryczne o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
   a) dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość AD. Udowodnij, że kąt ACB jest dwa razy większy od kąta BAD,

b) na bokach *BC* i *CD* prostokąta *ABCD* zbudowano, na zewnątrz prostokąta, dwa trójkąty równoboczne *BCE* i *CDF*. Udowodnij, że $AE = AF$.

IX. Wielokąty. Uczeń:

1) zna pojęcie wielokąta foremnego;
2) stosuje wzory na pole trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu, a także do wyznaczania długości odcinków o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
   a) oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm,
   b) przekątne rombu *ABCD* mają długości $AC = 8$ dm i $BD = 10$ dm. Przekątną *BD* rombu przedłużono do punktu *E* w taki sposób, że odcinek *BE* jest dwa razy dłuższy od tej przekątnej. Oblicz pole trójkąta *CDE*. (Zadanie ma dwie odpowiedzi).

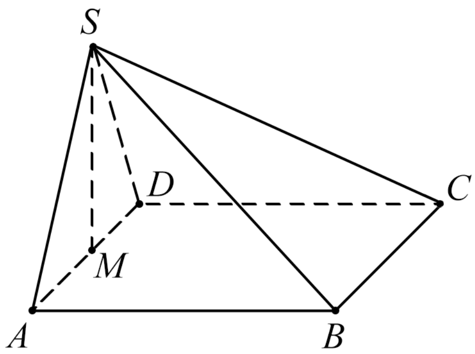
X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:

1) zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki jak $x \geq 1{,}5$ lub taki jak $x < -\frac{4}{7}$;
2) znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;
3) rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);
4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;
5) oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych;
6) dla danych punktów kratowych *A* i *B* znajduje inne punkty kratowe należące do prostej *AB*.

XI. Geometria przestrzenna. Uczeń:

1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe;
2) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładowym zadaniu:
   Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa równe kąty mają po 45°, a najdłuższy bok ma długość $6\sqrt{2}$ dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastosłupie ścianą boczną o największej powierzchni, ma długość 4 dm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
3) oblicza objętości i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładzie:

Prostokąt $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$, punkt M jest środkiem krawędzi AD, odcinek MS jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: $AD = 10$ cm, $AS = 13$ cm oraz $AB = 20$.



Oblicz objętość ostrosłupa.

XII. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:

1) wyznacza zbiory obiektów, analizuje i oblicza, ile jest obiektów, mających daną własność, w przypadkach niewymagających stosowania reguł mnożenia i dodawania;
2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kuli spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych.

XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń:

1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych;
2) tworzy diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł;
3) oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.

XIV. Długość okręgu i pole koła. Uczeń:

1) oblicza długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy;
2) oblicza promień lub średnicę okręgu o danej długości okręgu;
3) oblicza pole koła o danym promieniu lub danej średnicy;
4) oblicza promień lub średnicę koła o danym polu koła;
5) oblicza pole pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień.

XV. Symetrie. Uczeń:

1) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
2) zna i stosuje w zadaniach podstawowe własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta jak w przykładowym zadaniu:

Wierzchołek *C* rombu *ABCD* leży na symetralnych boków *AB* i *AD*. Oblicz kąty tego rombu;

3) rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz uzupełnia figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;
4) rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii.

XVI. Zaawansowane metody zliczania. Uczeń:

1) stosuje regułę mnożenia do zliczania par elementów o określonych własnościach;
2) stosuje regułę dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach, wymagających rozważenia kilku przypadków, na przykład w zliczaniu liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mających trzy różne cyfry albo jak w zadaniu:
   W klasie jest 14 dziewczynek i 11 chłopców. Na ile sposobów można z tej klasy wybrać dwuosobową delegację składającą się z jednej dziewczynki i jednego chłopca?

XVII. Rachunek prawdopodobieństwa. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem;
2) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na losowaniu dwóch elementów bez zwracania jak w przykładzie:
   Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.

Warunki i sposób realizacji

Proponuje się, aby w latach 2017/18, 2018/19 i 2019/20 w klasie VII zrealizowano dodatkowo dział I pkt 5, dział II pkt 13–17, dział IV pkt 13 i 14, dział V pkt 9, dział IX pkt 8, dział X pkt 5 i dział XI pkt 4 podstawy programowej dla klas IV–VI, o ile nie zostały one wcześniej zrealizowane w klasach IV–VI.

Działy XIV–XVII podstawy programowej dla klas VII i VIII mogą zostać zrealizowane po egzaminie ósmoklasisty.

W klasach IV–VI, kiedy nauka matematyki odbywa się przede wszystkim na konkretnych obiektach, należy przede wszystkim zadbać o pracę na przykładach, bez wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych. Dużą pomocą dla ucznia jest możliwość eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii. W szczególności, rozwiązywanie równań przez zgadywanie powinno być w klasach IV–VI traktowane jako poprawna metoda.

W klasach IV–VI zaleca się szczególną ostrożność przy wymaganiu od ucznia ścisłości języka matematycznego. Należy dbać o precyzję wypowiedzi, ale trzeba pamiętać o tym, aby unikać sytuacji, w której uczeń zostaje uznany za nieuzdolnionego matematycznie, gdy nie potrafi wyrazić poprawnego rozwiązania w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela. Umiejętność posługiwania się takimi pojęciami matematycznymi jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna jest o wiele bardziej istotna niż zapamiętanie formalnej definicji. W nauczaniu matematyki istotne jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych.

Większość uczniów w praktyce korzysta z kalkulatorów bądź innych urządzeń elektronicznych. Niemniej umiejętność wykonywania rachunków w pamięci, a także pisemnie, jest istotna. Obliczenia pamięciowe, w tym szacowanie wyników, bardzo przydają się w życiu codziennym. Samodzielne wykonywanie obliczeń, zarówno pamięciowych jak i pisemnych, daje uczniom o wiele lepsze wyobrażenie o liczbach i ich wielkościach, niż prowadzenie rachunków za pomocą sprzętu elektronicznego.

Myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, nie musi to oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi na różną szybkość rozwoju myślenia uczniów klas VII i VIII, a także, częściowo klasy VI, można rozważyć wprowadzenie nauczania matematyki w grupach międzyoddziałowych na różnych poziomach, podobnie jak to jest praktykowane w nauczaniu języków obcych nowożytnych. Grupy międzyoddziałowe realizowałyby różne partie materiału w tempie dostosowanym do możliwości uczniów, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej. Takie podejście nie powinno dzielić uczniów na lepszych lub gorszych, ale ma umożliwić uczniom, u których myślenie abstrakcyjne rozwija się wolniej, płynne przejście do etapu myślenia abstrakcyjnego. Uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.

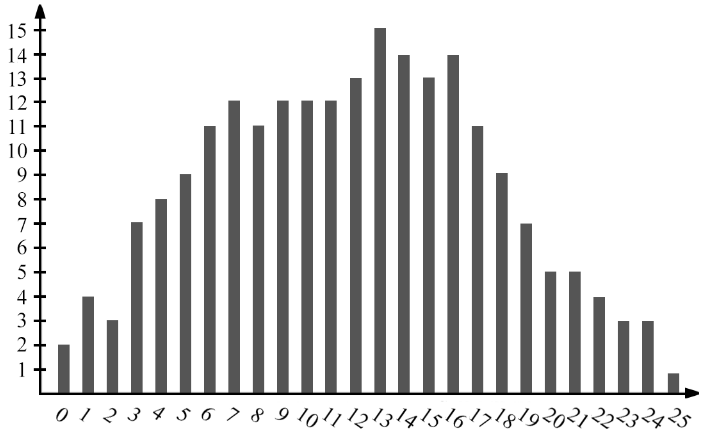
Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego…” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

W szkole podstawowej zadania na dowodzenie powinny być proste (w przypadku zdolnych uczniów można rozszerzyć stopień trudności). Oznacza to, że na przykład do dowodu zadania z geometrii powinno wystarczyć obliczanie kątów (z wykorzystaniem równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych, twierdzenia o sumie kątów trójkąta oraz twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego), użycie cech przystawania trójkątów do uzasadnienia przystawania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciągnięcie wniosków z tej własności.

Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa należy poprzedzić zadaniami, w których uczniowie wykonują doświadczenia, na przykład wielokrotne rzuty kostką. Można wówczas wskazać związek pomiędzy częstością zdarzenia a jego prawdopodobieństwem.

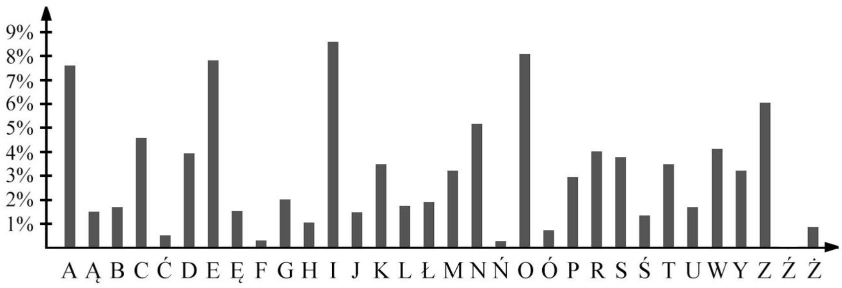
Szczególną rolę w kształceniu matematycznym odgrywają zadania ze statystyki. Z jednej strony odczytywanie i prezentowanie danych, wiąże matematykę z życiem codziennym i otwiera cały wachlarz zastosowań praktycznych. Wskazane jest, aby znaczna część zadań dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła. Z drugiej strony, na przykład operowanie wykresami zależności pozwala na intuicyjne opanowanie trudnych i abstrakcyjnych pojęć takich jak funkcja, monotoniczność, ekstrema, przy użyciu minimalnej wiedzy matematycznej (nie należy wprowadzać tych pojęć w szkole podstawowej). Stanowi to wstęp do wprowadzenia tych pojęć w szkole ponadpodstawowej. Dla przykładu załączono kilka zadań ze statystyki, z których część może być wykorzystana na zajęciach, bądź w projektach edukacyjnych uczniowskich.

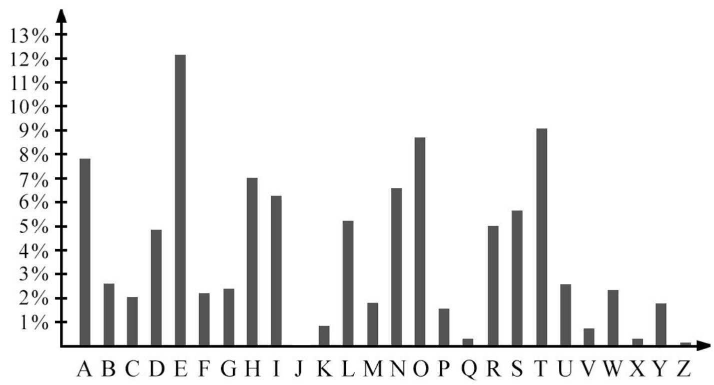
1. We wszystkich trzech klasach VI w pewnej szkole przeprowadzono ankietę „Jaki smak lodów lubisz najbardziej?". W ankiecie wzięli udział wszyscy uczniowie z tych klas. Wyniki, jakie otrzymano, były następujące: w klasie VIa – 12 osób wybrało lody czekoladowe, 7 osób – lody waniliowe, a 6 osób – lody truskawkowe. W klasie VIb – 5 osób wybrało lody waniliowe, 10 osób – lody truskawkowe, a 6 osób – lody czekoladowe. W ostatniej klasie VIc po 7 osób wybrało lody truskawkowe i lody czekoladowe, a 9 osób lody waniliowe. Wykonaj diagram słupkowy przedstawiający wyniki tej ankiety. Odczytaj, które lody cieszą się największą popularnością w klasach VI w tej szkole.
2. Odczytaj z prognozy pogody (podanej w formie meteorogramu), w którym z najbliższych dni prognozowana temperatura będzie największa. Podaj w jakich godzinach, według prognozy, temperatura powietrza będzie rosła, a w jakich malała. W którym z najbliższych dni pogoda będzie najlepsza do organizacji wycieczki? Odpowiedź uzasadnij.
3. W konkursie matematycznym startowało 220 uczniów. Każdy zawodnik mógł uzyskać maksymalnie 25 punktów. Poniższy diagram słupkowy pokazuje, ilu uczniów uzyskało poszczególne liczby punktów od 0 do 25. Do następnego etapu konkursu przechodzi 20% uczestników, którzy uzyskali najlepsze wyniki. Wojtek dostał 19 punktów. Czy przejdzie on do następnego etapu?



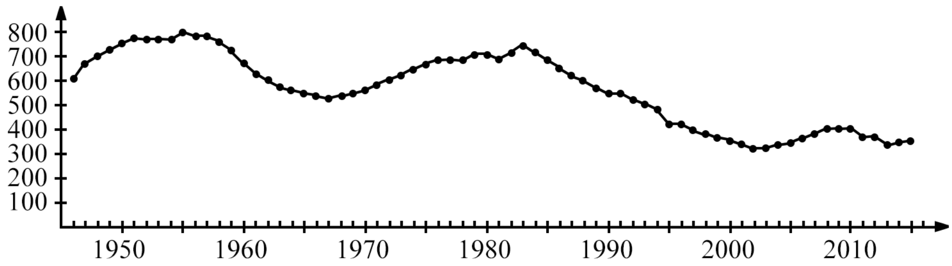
(Odp.: tak).

4. Wybierz stronę dowolnego tekstu napisanego w języku polskim. Policz wszystkie litery w tym tekście oraz policz liczbę wystąpień każdej litery alfabetu polskiego. Możesz to łatwo zrobić zapisując cały tekst na przykład w programie *Word*, a następnie zamieniając każdą literę na przykład na gwiazdkę (użyj: *Zamień*, a następnie *Zamień wszystko*; komputer wskaże Ci liczbę dokonanych zamian – jest to liczba wystąpień zamienianej litery w całym tekście). Oblicz częstość występowania każdej litery w całym tekście. Sporządź diagram słupkowy znalezionych częstości występowania. Porównaj otrzymany diagram z diagramami otrzymanymi przez Twoich kolegów na podstawie wybranych przez nich tekstów. Czy te diagramy są podobne? Zrób analogiczne ćwiczenie dla tekstów napisanych w innych językach (na przykład w języku angielskim). Czy otrzymane diagramy częstości są podobne do diagramów dla języka polskiego?
Odp.: odpowiednie diagramy słupkowe sporządzone na podstawie pierwszych 72 wersów *Pana Tadeusza* oraz pierwszych czterech akapitów powieści *Hobbit* w języku angielskim wyglądają następująco:





5. Znajdź dane dotyczące liczby urodzin dzieci w Polsce w latach 1946–2015. Sporządź wykres liniowy tych danych (odpowiednio zaokrąglonych). Czy możesz wyjaśnić skąd się biorą znaczne różnice w liczbie urodzin (tzw. wyże i niże demograficzne)?
   Odp.: ten wykres wygląda następująco (dane w tysiącach urodzin):



6. Maciek dostał 10 ocen z matematyki. Oto 9 z nich: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu jego ocen jest równa 3,6. Wyznacz brakującą ocenę.
7. Oblicz pole kwadratu według wzoru $P = a^2$ dla następujących wartości a: $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{4}$, $a = 1$, $a = \frac{5}{4}$, $a = \frac{3}{2}$, $a = \frac{7}{4}$ *oraz* $a = 2$.

8. Każdą z obliczonych wartości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych, w którym jednostka na osi poziomej (na której są zaznaczone wyłącznie wartości a) ma długość 6 cm, a jednostka na osi pionowej (na której są zaznaczone obliczone wartości *P*) ma długość 2 cm.
9. Janek poszedł na wycieczkę pieszą. Od godziny 8^{00} do godziny 10^{00} szedł pod górę z prędkością 4 km/h; od godziny 10^{00} do godziny 10^{30} odpoczywał na szczycie góry; od godziny 10^{30} do godziny 12^{00} szedł z góry z prędkością 4 km/h; od godziny 12^{00} do godziny 14^{00} szedł po poziomej drodze z prędkością 5 km/h. Począwszy od godziny 8^{00} do godziny 14^{00}, co 15 minut oblicz, jaką drogę przeszedł od początku wycieczki do danej chwili. Obliczone wielkości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych.

Ogólne założenia zmian[1]

Cele ogólne nauczania matematyki

Celem nauczania matematyki jest wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych właściwych danemu wiekowi. Jednym z zadań w procesie kształcenia ucznia jest rozwinięcie umiejętności wnioskowania, zdolności analitycznych, myślenia strategicznego (a więc umiejętności planowania kolejnych kroków postępowania w celu rozwiązania problemu, a także dzielenia procesu rozwiązywania złożonego problemu na etapy) oraz umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązanie zadania.

[1] Na podstawie: Maciej Borodzik, Regina Pruszyńska, *Komentarz*, [w:] *Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła podstawowa. Matematyka*, *https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/podstawa-programowa/*

Drugim z głównych celów jest rozwinięcie umiejętności rachunkowej na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z zakresu innych przedmiotów w klasach IV–VIII. Powyższe cele, sprecyzowane w podstawie programowej jako cele ogólne, nie różnią się istotnie od celów, które wymienione były w poprzedniej podstawie programowej.

Treści nauczania – podobieństwa i różnice w klasach IV–VI

Treści nauczania w klasach IV–VI ośmioletniej szkoły podstawowej odpowiadają w zasadzie treściom nauczanym dotąd w tychże klasach sześcioletniej szkoły podstawowej. Wprowadzono przy tym kilka rozszerzeń, o których mowa poniżej:

a. Treści rozszerzające dotychczasowy zakres wymagań

- Po pierwsze, niektóre pojęcia niewymienione w podstawie dla klas IV–VI sześcioletniej szkoły podstawowej (np. największy wspólny dzielnik), które muszą być wspomniane na lekcjach ze względu na inne treści nauczania wymienione w podstawie, pojawiają się w sposób jawny.
- Po drugie, rozszerzony został zakres nauczania niektórych treści nauczania, np. liczb rzymskich z 30 do 3000. Pojawiają się też bardziej złożone przykłady, jak w przypadku obliczania pól figur. Obliczanie pól figur na kratkach nie występowało w poprzedniej podstawie, natomiast doświadczenie uczy, że stanowi ono bardzo dobre przygotowanie uczniów do zrozumienia abstrakcyjnego pojęcia układu współrzędnych. Ponadto daje możliwość wprowadzenia dość różnorodnych zadań na obliczanie pól figur na kratkach poprzez dopełnianie do figur prostszych albo podział na prostsze figury. Takie zadania nie tylko kształtują ogólne myślenie matematyczne, ale również budują intuicję dotyczącą pojęcia pola.
- Po trzecie, dodano również działania na liczbach wymiernych dowolnego znaku, które do tej pory były w pełni wprowadzane dopiero w gimnazjum.

b. Przyczyny rozszerzenia treści nauczania

Rozszerzenie treści nauczania jest spowodowane również likwidacją sprawdzianu po VI klasie. Odbywał się on w kwietniu, treści zawarte w podstawie programowej musiały więc być zrealizowane do końca marca. Pozostawały po nim do końca roku szkolnego trzy miesiące, a więc ponad 40 godzin lekcyjnych matematyki do zagospodarowania. Obliczono, że rozszerzenie treści wprowadzone w nowej wersji podstawy powinno zająć około połowy tego czasu. Pozostałe godziny lekcyjne można będzie wykorzystać na pogłębioną realizację podstawy programowej bądź na dodatkowe powtórzenie materiału. W przypadku zrealizowania wszystkich treści nauczania w krótszym czasie można sięgnąć po zadania trudniejsze, wymagające bardziej złożonego rozumowania, unikając przedwczesnego wprowadzania treści przewyższających w tym momencie możliwości intelektualne większości uczniów. Oprócz zadań dostępnych w dopuszczonych do użytku podręcznikach można na lekcjach wykorzystywać zadania ogólnie dostępne jako otwarte zasoby edukacyjne, na przykład zadania z konkursów matematycznych dla szkół podstawowych.

Realizacja podstawy w okresie przejściowym

Treści nauczania rozszerzające zakres materiału w klasach IV–VI ośmioletniej szkoły podstawowej w stosunku do poprzedniej podstawy programowej w latach 2017/2018, 2018/2019 i 2019/2020 powinny być zrealizowane w klasie VII, o ile nie zostały one wcześniej omówione w klasach IV–VI sześcioletniej szkoły podstawowej.

Sposób doboru treści nauczania dla klasy VII i VIII

W klasach VII–VIII obecna podstawa programowa została uszczuplona w stosunku do podstawy dla etapu gimnazjalnego. Zredukowanie materiału było niezbędne ze względu na mniejszą liczbę godzin w dwóch ostatnich klasach szkoły podstawowej w stosunku do trzech klas gimnazjum. Pewne modyfikacje były więc konieczne. Przy decyzji, które treści nauczania pozostawić, a które przenieść do szkół ponadpodstawowych, kierowano się objaśnionymi poniżej przesłankami.

Tam, gdzie to możliwe, wybierano treści nauczania stymulujące rozwój myślenia matematycznego u uczniów, pomijając te działy, których realizacja często sprowadza się do powtarzania prostych, wyuczonych algorytmów. Z drugiej strony, przesunięto do realizacji na etapie szkoły ponadpodstawowej treści zbyt abstrakcyjne w stosunku do poziomu rozwoju ucznia w klasach VII–VIII.

Wybrane treści nauczania w klasie VII i VIII

a. Kombinatoryka

Jednym z działów pozostawionych w podstawie dla szkoły podstawowej jest kombinatoryka. Zagadnień z nią związanych pojawia się nawet nieco więcej niż do tej pory w gimnazjum. Pomijając fakt, że kombinatoryka jest rozwijająca, niealgorytmiczna i istotna sama w sobie, ma ona jeszcze jedną zaletę. Otóż uczeń może osiągnąć sukces w kombinatoryce nawet, jeśli jego dotychczasowa wiedza matematyczna była bardzo mała. Realizacja tego działu stwarza okazję „nowego startu" uczniom, którzy do tej pory uzyskiwali na matematyce słabe wyniki. Warto dawać tę szansę uczniom i nie hamować ich zapału poprzez wprowadzanie nadmiaru formalizmu. Nadmienić tu należy, że kombinatoryka jest jedną z najbardziej dynamicznie rozwijających się dziedzin współczesnej matematyki i informatyki.

b. Geometria

Drugim działem, który znacząco wspiera rozwój matematyczny ucznia, jest geometria. Jakkolwiek konieczne było ograniczenie treści nauczania w tym zakresie (ze względu na ramy czasowe), pozostawiono w podstawie dla szkoły podstawowej najważniejszą część tego działu, a mianowicie dowody matematyczne. Sztuki dowodzenia dziecko uczy się latami i nie należy oczekiwać, że pod koniec VIII klasy wszyscy uczniowie będą umieli przeprowadzać dowody złożone z wielu kroków. Z tego względu w nowej podstawie programowej zawarto postulat, aby wymagany od ucznia w szkole podstawowej dowód składał się z nie więcej niż kilku kroków. Zatem nauczyciel może żądać zauważenia co najwyżej jednej pary trójkątów przystających i wyciągnięcia wniosków z tej własności. To ograniczenie jest konieczne, aby uniknąć ryzyka wprowadzania zadań na dowodzenie zbyt trudnych do rozwiązania dla przeciętnego ucznia. Z drugiej strony, dowodzenie jest podstawową umiejętnością matematyka. Wielu ekspertów mówi o potrzebie ponownego wprowadzenia nauczania logiki do szkół, a właśnie dowody najlepiej uczą ścisłego myślenia oraz stosowania logiki w praktyce. Uczeń, który na wcześniejszym etapie zrozumie istotę dowodzenia, o wiele łatwiej opanuje treść zaawansowanych działów matematyki w szkole ponadpodstawowej.

c. O funkcjach inaczej

W podstawie programowej starano się unikać słowa „funkcja”. Nie jest to spowodowane chęcią eliminacji zagadnienia funkcji z nauczania na etapie szkoły podstawowej, ale dążeniem do zniwelowania nadmiernej formalizacji tego pojęcia. Szkolna definicja – brzmiąca: „funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu ze zbioru Y” – obarczona jest szeregiem wad. Po pierwsze, nic uczniowi nie wyjaśnia. Nawet uczniowie biorący udział w olimpiadach matematycznych na etapie gimnazjum mają problemy ze zrozumieniem definicji – mówimy o zrozumieniu, a nie przyswojeniu pamięciowym. Po wtóre, ta definicja zachęca nauczyciela do sprawdzania, co jest funkcją, a co nią nie jest. Działanie takie wydaje się jednak całkowicie sprzeczne z celem wprowadzania pojęcia funkcji w szkole. Od ucznia oczekuje się bowiem, że będzie umiał operować funkcjami (na poziomie stosownym do swojego etapu rozwoju), a nie sprawdzać, czy spełnione są warunki wymienione w definicji. Szukanie potwierdzenia, że jakieś zjawisko można zakwalifikować jako funkcję, nie ma mocnego uzasadnienia w dydaktyce, podobnie jak sprawdzanie, czy coś jest kątem, albo czy coś jest zmienną. Po trzecie wreszcie, przytoczona wyżej definicja funkcji – z formalnego punktu widzenia – nie wydaje się całkowicie poprawna. Mianowicie zastępujemy niekiedy słowo „funkcja” słowem „przyporządkowanie” lub „odwzorowanie”, które nie zalicza się do podstawowych pojęć w matematyce, a zatem – jeśli chcieć wszystko formalizować – również powinno być zdefiniowane. Ścisła definicja słowa „przyporządkowanie” wymaga jednakże wprowadzenia aksjomatyki zrozumiałej dopiero dla studentów studiów matematycznych.

Mając na względzie trzy powyższe argumenty, postuluje się zatem odchodzenie w szkole podstawowej od abstrakcyjnej definicji funkcji. Dopiero w szkole ponadpodstawowej, kiedy będzie mowa o złożeniach funkcji, wspomniana definicja okaże się użyteczna.

Nie oznacza to żadną miarą odejścia od nauczania o funkcjach. W trakcie nauki uczeń napotyka bardzo wiele pojęć, które bywają definiowane wyłącznie intuicyjnie, gdyż ich ścisła abstrakcyjna definicja jest zrozumiała jedynie dla osób zawodowo zajmujących się daną dziedziną, niekoniecznie nawet dla nauczycieli. Takimi pojęciami w matematyce są choćby pole powierzchni czy objętość, w fizyce – na przykład temperatura, w geografii – układ współrzędnych sferycznych.

W intuicyjny sposób funkcje (jako zależności) definiował Stefan Banach w podręczniku *Algebra dla klasy II* gimnazjalnej, podobnie w podręczniku *Rachunek różniczkowy i całkowy* przeznaczonym dla studentów Politechniki Lwowskiej. Starano się powrócić do zaproponowanego przez niego podejścia. Nic zatem nie stoi na przeszkodzie, aby uczeń szkoły podstawowej rozumiał funkcję jako „zależność", lub jako „coś, co bierze jedną liczbę i wyrzuca drugą" (jak procedura w informatyce), lub jako „coś, co ma wykres" (w rzeczywistości ta ostatnia definicja jest zaskakująco bliska ścisłej definicji funkcji). Oznacza to również, że na lekcjach fizyki i informatyki można posługiwać się pojęciem funkcji wówczas, gdy jest to wskazane.

Funkcje w niniejszej podstawie programowej opisane są w punktach poświęconych statystyce, a nie, jak było do tej pory, w punktach poświęconych układowi współrzędnych; zabieg ten ma zasugerować silniejsze powiązanie pojęcia funkcji ze statystyką. Sformułowania umieszczone w warunkach realizacji podstawy precyzują, jaki poziom zrozumienia pojęcia funkcji jest oczekiwany od ucznia kończącego VIII klasę szkoły podstawowej.

d. Układy równań

W podstawie programowej nauczania matematyki w szkole podstawowej nie wprowadzono układów równań. W oderwaniu od geometrycznej interpretacji rozwiązywanie układów równań jest czynnością mechaniczną; dopiero przy wprowadzeniu podstaw funkcji liniowej i geometrii analitycznej, układom równań może towarzyszyć interpretacja geometryczna. Może ona bardzo pomóc przynajmniej niektórym uczniom i sprawić, że rozwiązywanie układów nie będzie tylko ćwiczeniem sprawności rachunkowej. Nie oznacza to bynajmniej, że w szkołach podstawowych nie mogą pojawić się zadania prowadzące do rozwiązywania układów równań formułowane w postaci zagadek, jak na przykład: „na łące są krowy i bażanty, mają łącznie 100 nóg i 40 głów, określ, ile jest krów, a ile bażantów". Takie zabawy, zalecane zwłaszcza w klasach młodszych, mogą uczyć bądź to „kombinowania" matematycznego, bądź rozwiązywania równań przez zgadywanie. Jak zaznaczono w warunkach realizacji podstawy, rozwiązanie równania przez zgadywanie powinno być traktowane jako równoprawna metoda rozwiązania problemu do VI klasy włącznie. Zgadywanie rozwija intuicję matematyczną, wyobrażenie o liczbie i uczy umiejętności szacowania. W klasach starszych zadanie o krowach i bażantach można rozwiązać poprzez ułożenie równania z jedną niewiadomą.

Przy okazji tego zadania wprowadza się układy równań nieoznaczone i sprzeczne – na przykład zastępując bażanty końmi w treści zadania.

e. Statystyka

Szczególną rolę w nowej podstawie programowej odgrywa statystyka i rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka umożliwia połączenie nauczania matematyki z konkretnymi problemami z życia codziennego. Odczytywanie i prezentowanie danych oraz analizowanie ich własności jest umiejętnością bardzo przydatną w życiu codziennym. Ponadto statystyka umożliwia intuicyjne wprowadzenie wielu pojęć matematycznych bez ich precyzyjnego definiowania, na które przyjdzie czas w szkole ponadpodstawowej. Załączone na końcu podstawy przykłady zadań ze statystyki pozwalają uczniom na intuicyjne przyswojenie sobie takich pojęć jak: „centyl", ,,funkcja", ,,monotoniczność". Dla podkreślenia związku statystyki z życiem codziennym ważne jest, aby w zadaniach statystycznych pracować na danych rzeczywistych – np. z Głównego Urzędu Statystycznego, Narodowego Banku Polskiego czy tablic klimatycznych. Warto również nadmienić, że badanie częstości występowania danej litery w tekście, które wymieniono w warunkach realizacji podstawy jako jeden z możliwych problemów statystycznych, zalicza się do metod łamania prostych szyfrów, zatem zadanie typu: „zlicz średnią częstość wystąpienia każdej z liter w tekście" można traktować jako wstęp do kryptografii.

f. Rachunek prawdopodobieństwa

Ściśle związany ze statystyką jest rachunek prawdopodobieństwa. Pojęcie prawdopodobieństwa okazuje się trudne. Wielu dobrych uczniów na pytanie: ,,jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w 5000 rzutów monetą wypadnie dokładnie 2500 orłów odpowiada: „coś koło ½". Należy więc postarać się, aby uczniowie dokładnie zrozumieli, czym jest prawdopodobieństwo. Dlatego też zadecydowano, by pozostawić w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej elementy rachunku prawdopodobieństwa. Zaleca się poprzedzenie nauki rachunku prawdopodobieństwa wykonaniem dużej liczby eksperymentów (np. rzutów kostką) – tak, aby uczeń zauważył związek między częstością wystąpienia zdarzenia a prawdopodobieństwem. Zrozumienie tej zależności jest o wiele ważniejsze niż umiejętność mechanicznego operowania definicją prawdopodobieństwa.

g. Pierwiastki

Pojęcie pierwiastka kwadratowego pozostawiono w podstawie dla klas VII–VIII ze względu na wykorzystywanie go w obliczeniach nawiązujących do twierdzenia Pitagorasa oraz przy obliczaniu długości boku kwadratu o zadanym polu, natomiast pojęcie pierwiastka sześciennego – ze względu na możliwość wyznaczania np. długości boku sześcianu przy danej objętości.

h. Wyrażenia algebraiczne

W zakresie szkoły podstawowej mnożenie dwóch sum algebraicznych jest wprowadzone dla najprostszych przypadków – to znaczy mnożenia dwóch dwumianów. Liczymy przy tym, że zrozumienie zasady mnożenia sum algebraicznych w prostym przypadku ułatwi nauczanie mnożenia ogólnych sum algebraicznych w szkole ponadpodstawowej. Przy okazji mnożenia dwumianów można wspomnieć o wzorach skróconego mnożenia, nie będą one jednak wymagane na egzaminie w szkole podstawowej. Do podstawy programowej dla szkoły ponadpodstawowej przesunięto wyłączanie jednomianu poza nawias z sumy algebraicznej.

Novum w podstawie programowej

Swego rodzaju novum w podstawie programowej stanowi zapis dotyczący treści nauczania niewymaganych na egzaminie w klasie VIII. W założeniu są to treści, które można realizować od kwietnia do czerwca w klasie VIII, jakkolwiek ostateczną decyzję co do terminu ich wdrażania pozostawiono nauczycielowi. Wprowadzenie tak opisanych treści nauczania jest odpowiedzią na postulaty wielu nauczycieli. Do tej pory bowiem żadna podstawa programowa nie miała wyszczególnionych treści, które de facto nie będą wymagane na egzaminie. Ze względu na możliwość nauki jeszcze przez co najmniej 2,5 miesiąca po egzaminie zaproponowano te treści, które będą rozszerzane w szkole ponadpodstawowej.

Perspektywa zmiany podstawy

W perspektywie następnych kilku lat, kiedy w szkołach będą uczyć się uczniowie, którzy rozpoczęli edukację szkolną w wieku lat siedmiu, i którzy będą realizować nową podstawę programową w klasach I–III, będzie można dokonać korekty obecnej podstawy i przywrócić do szkół podstawowych znaczną część materiału przesuniętego obecnie do szkół ponadpodstawowych.

Podstawa programowa a rozwój intelektualny ucznia

Zmiany w podstawie programowej zostały wprowadzone ze względu na fakt, iż rozwój umiejętności matematycznych ucznia w klasach IV–VIII w sposób naturalny dzieli się na dwa etapy związane z rozwojem intelektualnym dziecka. Starano się dostosowywać podstawę programową do etapów rozwoju intelektualnego ucznia. Według powszechnie przyjętej teorii Jeana Piageta[2] w okresie nauki w szkole (czyli między 7. a 15. rokiem życia) wyróżnić można dwa etapy rozwoju. Pierwszy z nich to etap operacyjny konkretny, drugi to etap operacyjny formalny.

[2] Zob. np.: J. Piaget, *Studia z psychologii dziecka*, Warszawa 1966.

a. Etap konkretny

Etap operacyjny konkretny przypada na lata życia 7–11, a więc trwa w IV i V klasie, zahaczając również o klasę VI. Jest to czas, w którym uczeń poznaje matematykę za pomocą konkretnych odniesień do rzeczywistości. Wszelkie wprowadzane w tym okresie pojęcia i terminy są powiązane ze zjawiskami występującymi w otaczającym świecie. Uczeń uczy się wnioskować, rozpatrując konkretne obiekty i sytuacje. W nauczaniu nacisk kładzie się na arytmetykę i elementarną geometrię. Nie można w tym czasie oczekiwać, że uczeń będzie w stanie przeprowadzać abstrakcyjne rozumowanie. Wydaje się naturalne, iż na tym etapie nie zrozumie także ścisłych definicji abstrakcyjnych pojęć i nie zacznie posługiwać się precyzyjnym językiem matematycznym.

b. Etap formalny

Rozwój myślenia abstrakcyjnego przypada między 11. a 15. rokiem życia, a więc rozpoczyna się na ogół w klasie szóstej; może on czasem rozpocząć się wcześniej, u części uczniów może przebiegać później. Ten etap rozwoju nazywany jest etapem operacyjnym formalnym. Dopiero wtedy rozwija się umiejętność myślenia abstrakcyjnego, a uczeń potrafi rozumować, korzystając z pojęć abstrakcyjnych. Wtedy też uczeń jest w stanie przyswoić sobie niektóre pojęcia algebraiczne, pojęcie prawdopodobieństwa czy bardziej zaawansowane własności figur geometrycznych. W tym okresie rozpoczyna się uświadamianie, czym jest dowód matematyczny, a uczeń może samodzielnie przeprowadzać dowodzenie prostych stwierdzeń.

c. Podział treści nauczania

Podział w podstawie programowej na klasy IV–VI i VII–VIII nie jest więc skutkiem jedynie określonego trybu wprowadzania reformy, ale w pewnym sensie odzwierciedla rozwój intelektualny ucznia. Wizja takiego ukształtowania podstawy programowej nie jest nowa, poprzednia podstawa programowa dla szkół podstawowych zawierała treści nauczania dostosowane do ucznia na etapie operacyjnym konkretnym, zaś podstawa dla gimnazjum – treści do stosowane do ucznia na etapie operacyjnym formalnym. Warto mieć na uwadze istnienie tych etapów rozwoju przy tworzeniu programu nauczania.

OPIS EGZAMINU ÓSMOKLASISTY Z MATEMATYKI[3]

Matematyka jest jednym z obowiązkowych przedmiotów egzaminacyjnych na egzaminie ósmoklasisty i na egzaminie maturalnym.

Egzamin ósmoklasisty z matematyki sprawdza, w jakim stopniu uczeń VIII klasy szkoły podstawowej spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla pierwszych dwóch etapów edukacyjnych (klasy I–VIII)[4].

ZADANIA NA EGZAMINIE

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których uczeń wybiera odpowiedź spośród podanych. Wśród zadań zamkniętych znajdą się m.in. zadania wyboru wielokrotnego, zadania typu prawda-fałsz oraz zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których uczeń samodzielnie formułuje odpowiedź. Przedstawione przez ucznia rozwiązanie zadania musi obrazować tok rozumowania, zawierać niezbędne rachunki, przekształcenia czy wnioski.

Wśród zadań otwartych znajdą się zarówno takie, które będzie można rozwiązać typowym sposobem, jak i takie, które będą wymagały zastosowania niestandardowych metod rozwiązywania. Uczeń będzie musiał, wykorzystując posiadane wiadomości i umiejętności, wymyślić i zrealizować własny plan rozwiązania zadania, który pozwoli mu wykonać polecenie lub udzielić odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu. W niektórych zadaniach uczeń będzie musiał przedstawić uzasadnienie wskazanych zależności.

Zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności opisanych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego:
- sprawność rachunkowa
- wykorzystanie i tworzenie informacji
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
- rozumowanie i argumentacja.

[3] Na podstawie: *Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019,* Edyta Warzecha (CKE), Renata Świrko (OKE w Gdańsku), Iwona Łuba (OKE w Łomży), Sabina Pawłowska (OKE w Warszawie), prof. dr hab. Zbigniew Semadeni, Agnieszka Sułowska, Józef Daniel (CKE), dr Marcin Smolik (CKE); *[https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/informatory/*

[4] Zgodnie z zapisem warunków i sposobu realizacji podstawy programowej działy XIV–XVII dla klas VII i VIII mogą zostać zrealizowane po egzaminie ósmoklasisty, zatem umiejętności zapisane w tych działach nie będą sprawdzane na egzaminie ósmoklasisty. Treści zalecane do realizacji – zawarte w działach: I pkt 5, II pkt 13–17, IV pkt 13 i 14, V pkt 9, IX pkt 8, X pkt 5 i XI pkt 4 podstawy programowej dla klas IV–VI – będą sprawdzane na egzaminie ósmoklasisty.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin ósmoklasisty z matematyki trwa 100 minut[5].
W arkuszu egzaminacyjnym będzie od 19 do 23 zadań. Liczbę zadań oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj zadań	Liczba zadań	Łączna liczba punktów	Udział w wyniku sumarycznym
zamknięte	14–16	14–16	ok. 50%
otwarte	5–7	14–16	ok. 50%
RAZEM	19–23	28–32	100%

W arkuszu egzaminacyjnym jako pierwsze zamieszczone będą zadania zamknięte, a po nich – zadania otwarte.

ZASADY OCENIANIA

Zadania zamknięte

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać, w zależności od jego złożoności, maksymalnie 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne rozwiązanie przyznaje się maksymalną liczbę punktów, nawet jeżeli nie została uwzględniona w zasadach oceniania.

Ocena rozwiązania zadania otwartego zależy od tego, jak daleko uczeń dotarł w drodze do całkowitego rozwiązania. Poniżej przedstawione zostały przykładowe schematy punktowania rozwiązań zadań otwartych.

Schemat punktowania rozwiązania zadania, za które można otrzymać maksymalnie 4 punkty:

4 pkt **–** rozwiązanie pełne.
3 pkt **–** rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zostało doprowadzone do końca, ale zawierało usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itd.).

[5] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych, oraz w przypadku cudzoziemców. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty* w danym roku szkolnym.

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie było kontynuowane lub było kontynuowane błędną metodą.
1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Schemat punktowania rozwiązania zadania, za które można otrzymać maksymalnie 3 punkty:
3 pkt – rozwiązanie pełne.
2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie było kontynuowane lub było kontynuowane błędną metodą.
1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Schemat punktowania rozwiązania zadania, za które można otrzymać maksymalnie 2 punkty:
2 pkt – rozwiązanie pełne.
1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu.
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

PRZYKŁADOWE ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

W *Informatorze* dla każdego zadania podano:

- liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie (po numerze zadania)
- najważniejsze wymagania ogólne i szczegółowe, które są sprawdzane tym zadaniem
- zasady oceniania rozwiązań zadań
- poprawne rozwiązanie każdego zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązania każdego zadania otwartego.

Przykłady zadań zamkniętych

Zadanie 8. (0–1)

Rzucamy raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie tą kostką wypadnie liczba oczek większa od 2, ale mniejsza od 6? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Wymaganie ogólne
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

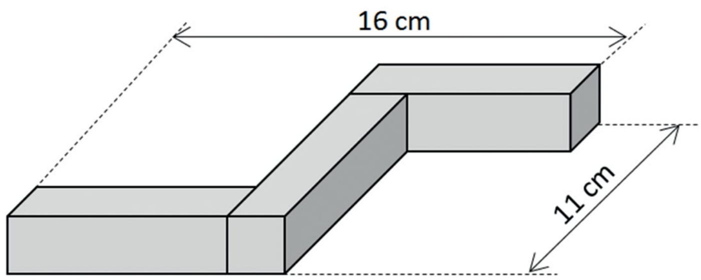
Wymaganie szczegółowe
KLASY VII i VIII
XII. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kuli spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie: B

Zadanie 10. (0–1)

Witek ma trzy jednakowe prostopadłościenne klocki. W każdym z tych klocków dwie ściany są kwadratami, a cztery pozostałe – prostokątami. Z tych klocków zbudował figurę przedstawioną na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dłuższe krawędzie prostopadłościennego klocka mają po 8 cm.	**P**	**F**
Objętość jednego klocka jest równa 72 cm^3.	**P**	**F**

Wymaganie ogólne
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

5) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie: PP

Zadanie 18. (0–1)

Na spektakl dostępne były bilety normalne w jednakowej cenie oraz bilety ulgowe, z których każdy kosztował o 50% mniej niż normalny. Pani Anna za 3 bilety normalne i 2 bilety ulgowe zapłaciła 120 złotych. Na ten sam spektakl pan Jacek kupił 2 bilety normalne i 3 ulgowe, a pan Marek kupił 2 bilety normalne i 1 ulgowy.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pan Jacek zapłacił za bilety **A** / **B**.	**A.** 120 zł	**B.** 105 zł
Pani Anna zapłaciła za bilety o **C** / **D** więcej niż pan Marek.	**C.** 45 zł	**D.** 30 zł

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII

VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:

4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.

Zasady oceniania

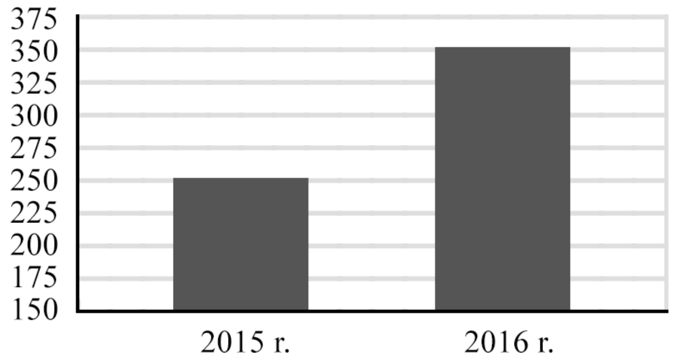
1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie: BC

Zadanie 19. (0–1)

Na diagramie przedstawiono wielkość produkcji krzeseł w firmie *Mebelix* w 2015 r. i 2016 r.



Czy liczba wyprodukowanych krzeseł w roku 2016 była o 100% większa od liczby wyprodukowanych krzeseł w roku 2015? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

<table>
<tr><td rowspan="2">T</td><td rowspan="2">Tak,</td><td rowspan="5">ponieważ</td><td>A.</td><td>drugi słupek na wykresie jest 2 razy wyższy od pierwszego.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B.</td><td rowspan="2">liczba krzeseł wyprodukowanych w 2016 roku jest o 40% większa niż liczba krzeseł wyprodukowanych w 2015 roku.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">N</td><td rowspan="3">Nie,</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C.</td><td rowspan="2">w 2016 roku wyprodukowano o 100 krzeseł więcej niż w 2015 roku.</td></tr>
<tr></tr>
</table>

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.

Wymagania szczegółowe

KLASY VII i VIII

V. Obliczenia procentowe. Uczeń:

5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości.

XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń:

1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

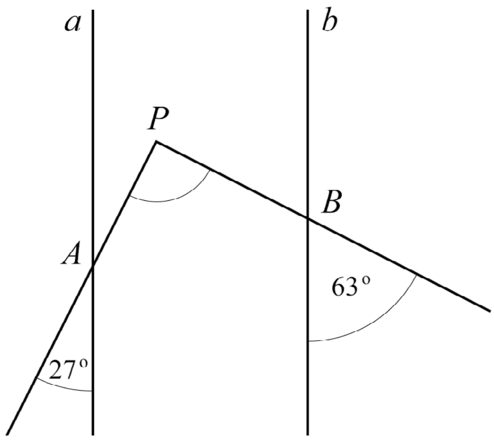
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie: NB

Przykłady zadań otwartych

Zadanie 31. (0–2)

Proste *a* i *b* są równoległe.



Półproste *PA* i *PB* przecinają te proste, w wyniku czego tworzą z nimi kąty ostre o miarach podanych na rysunku. Uzasadnij, że kąt *APB* jest prosty.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII

VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnej miary co najmniej jednego kąta odpowiadającego do 27° lub 63°,

lub

poprowadzenie prostej *AP* lub *PB* i zapisanie poprawnej miary kąta odpowiadającego w trójkącie *APC* lub *BPD*,

lub

poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnej miary kątów co najmniej jednego z trójkątów *APC* lub *BPD*,

lub

poprowadzenie prostej *c* i ustalenie miar kątów rozwartych pięciokąta *ACDBP*,

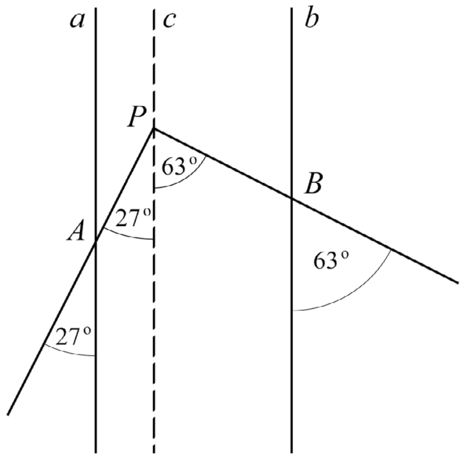
lub

1 pkt – poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnych miar kątów *CAP* i *CBP* czworokąta.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

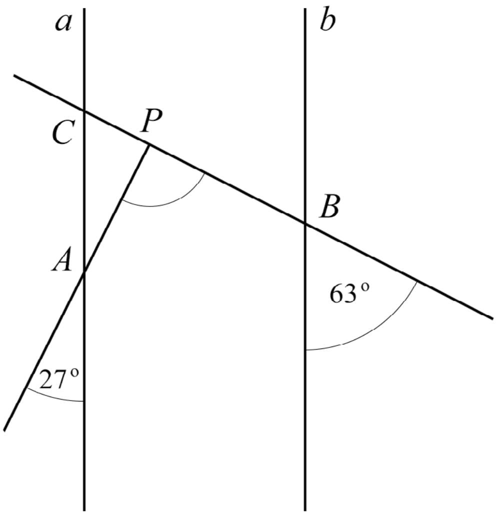
Pierwszy sposób

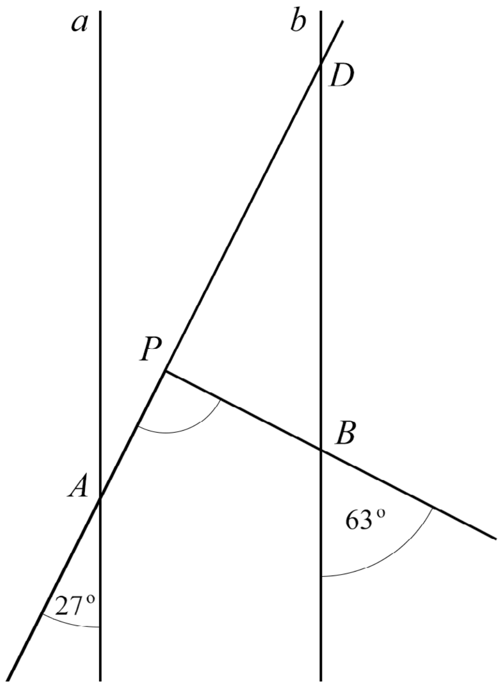


Przez punkt *P* prowadzimy prostą *c* równoległą do *a* i *b*. Dzieli ona kąt *APB* na dwie części, z których jedna jest kątem odpowiadającym do 27°, a druga – do 63°, zatem $|\sphericalangle APB| = 27° + 63° = 90°$.

Kąt *APB* jest kątem prostym.

Drugi sposób





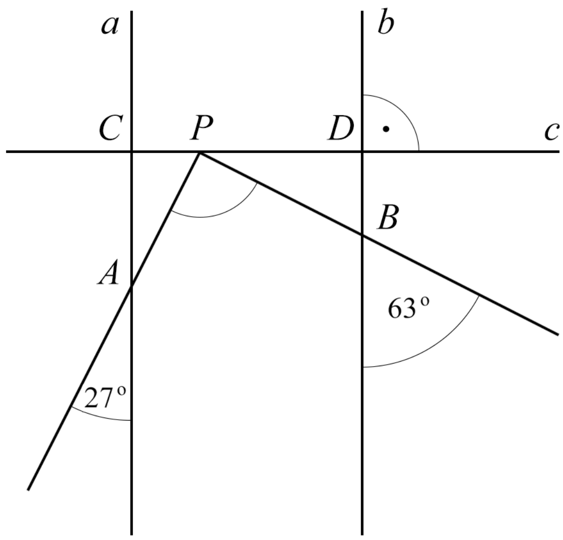
Przedłużamy półprostą *PB* do przecięcia z prostą *a* w punkcie *C* lub półprostą *PA* do przecięcia z prostą *b* w punkcie *D*. Ustalamy miary dwóch kątów w powstałych trójkątach *APC* lub *BPD*. Jeden z kątów jest kątem wierzchołkowym, a drugi – kątem odpowiadającym do kątów odpowiednio 63° i 27°.

Obliczamy miarę trzeciego kąta w powstałych trójkątach *APC* lub *BPD*.
$|\sphericalangle APC| = 180° – (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem przyległym do kąta *APC*, czyli jest kątem prostym.
$|\sphericalangle BPD| = 180° – (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem przyległym do kąta *BPD*, czyli jest kątem prostym.

Trzeci sposób



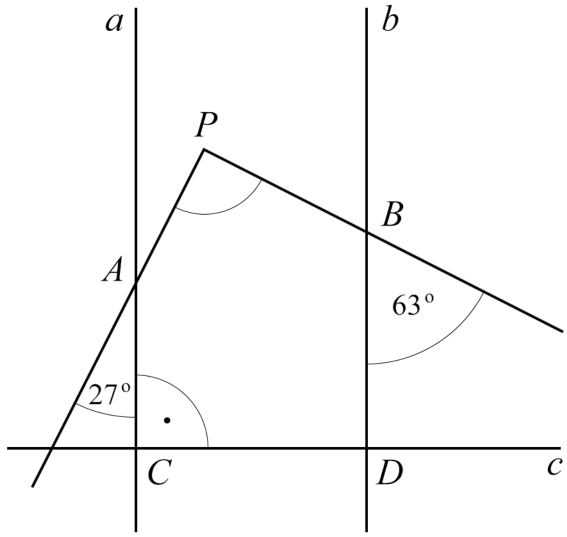
Przez punkt *P* prowadzimy prostą *c* prostopadłą do *a* i *b*. Wyznacza ona dwa trójkąty prostokątne *APC* i *BPD*. Ustalamy miary kątów ostrych tych trójkątów.

$|\sphericalangle CPA| = 90° – 27° = 63°$ oraz $|\sphericalangle BPD| = 90° – 63° = 27°$

$|\sphericalangle APB| = 180° – (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem prostym.

Czwarty sposób

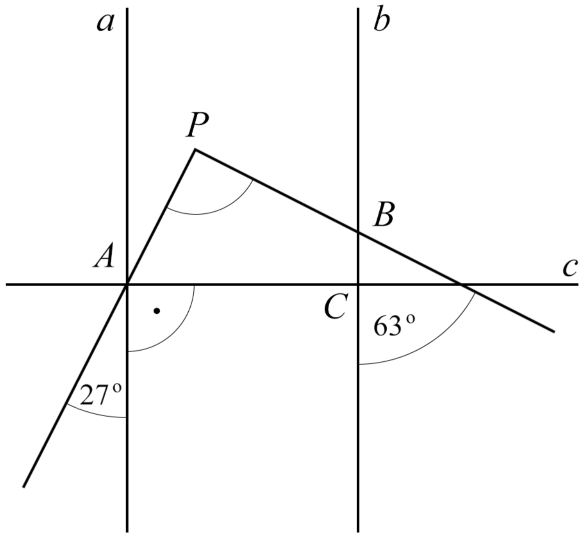


Prowadzimy prostą *c* prostopadłą do *a* i *b* tak, aby powstał pięciokąt wypukły. Ustalamy miary kątów rozwartych tego pięciokąta.

$|\sphericalangle CAP| = 180° – 27° = 153°$ oraz $|\sphericalangle PBD| = 180° – 63° = 117°$
$|\sphericalangle APB| = 540° – (90° + 90° + 117° + 153°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem prostym.

Piąty sposób



Przez punkt *A* prowadzimy prostą *c* prostopadłą do *a* i *b*. Wyznacza ona czworokąt *ACBP*.
Ustalamy miary dwóch kątów czworokąta.
$|\sphericalangle CBP| = 180° – 63° = 117°$ oraz $|\sphericalangle CAP| = 90° – 27° = 63°$
$|\sphericalangle APB| = 360° – (90° + 117° + 63°) = 90°$
Kąt *APB* jest kątem prostym.

Zadanie 24. (0–3)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: *K* = (–2, 8) i *M* = (4, 6). Podaj współrzędne punktu *P* takiego, że jeden z trzech punktów *P*, *K*, *M* jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. Podaj wszystkie możliwości.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.

3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII

X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:

4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dane są jeden koniec i środek.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – rozważenie wszystkich możliwości położenia punktu *P* i przedstawienie poprawnej metody wyznaczenia ich współrzędnych.

1 pkt – rozważenie jednej z możliwości położenia punktu *P* i przedstawienie poprawnej metody wyznaczenia jego współrzędnych.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Są trzy możliwości położenia punktów *P, K* i *M*.

- Punkt *P = (x,y)* jest środkiem odcinka *KM*.

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad\qquad y = \frac{8+6}{2} = 7$$

$$P = (1,7)$$

- Punkt *K* jest środkiem odcinka *PM*, gdzie $P = (x, y)$.

$$-2 = \frac{x+4}{2} \qquad\qquad 8 = \frac{y+6}{2}$$

$$x + 4 = -4 \qquad\qquad y + 6 = 16$$

$$x = -8 \qquad\qquad y = 10$$

$$P = (-8,10)$$

- Punkt *M* jest środkiem odcinka *PK*, gdzie *P = (x,y)*.

$$4 = \frac{x-2}{2} \qquad 6 = \frac{y+8}{2}$$

$$x-2=8 \qquad y+8=12$$

$$x=10 \qquad y=4$$

$$P=(10,4)$$

Odpowiedź: Punkt *P* może mieć współrzędne (1,7), (–8,10) lub (10,4).

Zadanie 32. (0–4)

W pojemniku znajdują się niebieskie, czarne i zielone piłeczki. Czarnych piłeczek jest o 20% mniej niż niebieskich, a niebieskich – o 6 mniej niż zielonych. Niebieskich i zielonych piłeczek jest łącznie o 48 więcej niż czarnych. Ile jest wszystkich piłeczek w tym pojemniku? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:
4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie pełne.
3 pkt – obliczenie liczby piłeczek jednego koloru (poprawne rozwiązanie równania zgodnego z warunkami zadania).
2 pkt – zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą oznaczającą liczbę piłeczek wybranego/danego koloru.
1 pkt – opisanie – w zależności od liczby piłeczek wybranego koloru – liczby piłeczek pozostałych dwóch kolorów.
0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

n — liczba niebieskich piłeczek

$0{,}8n$ — liczba czarnych piłeczek

$n + 6$ — liczba zielonych piłeczek

$n + (n + 6) = 0{,}8n + 48$

$2n + 6 = 0{,}8n + 48$

$1{,}2n = 42$

$n = 35$

$35 + 28 + 41 = 104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

Drugi sposób

z — liczba zielonych piłeczek

$z - 6$ — liczba niebieskich piłeczek

$0{,}8(z - 6)$ — liczba czarnych piłeczek

$z + (z - 6) = 0{,}8(z - 6) + 48$

$2z - 6 = 0{,}8z - 4{,}8 + 48$

$1{,}2z = 49{,}2$

$z = 41$

$z - 6 = 35$

$0{,}8(z - 6) = 28$

$35 + 28 + 41 = 104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

Trzeci sposób

c — liczba czarnych piłeczek

$1{,}25c$ — liczba niebieskich piłeczek

$1{,}25c + 6$ — liczba zielonych piłeczek

$1{,}25c + (1{,}25c + 6) = c + 48$

$2{,}5c + 6 = c + 48$

$1{,}5c = 42$

$c = 28$

$1{,}25c = 35$

$1{,}25c + 6 = 41$

$35 + 28 + 41 = 104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

MATERIAŁ DYDAKTYCZNY

Tworzenie i stosowanie strategii rozwiązywania problemów. Jak wspomagać naukę rozumowania i argumentowania?

Kompetencje matematyczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji. Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza. Podstawę stanowi dobre opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia oraz prezentacji. Konieczna wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje solidną umiejętność liczenia, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź.

Szczególnie ważne jest, aby zdobyta przez ucznia w szkole wiedza, niezależnie od realizowanego zagadnienia, była użyteczna, aby to uczeń widział potrzebę jej zdobywania i pogłębiania. Jednym z głównych celów nauczania matematyki, podkreślanym w podstawie programowej, jest wyposażenie ucznia w elementarne umiejętności na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z innych przedmiotów zarówno na danym poziomie nauczania, jak i na wyższych. Proces nauczania matematyki powinien być nakierowany na wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych właściwych danemu wiekowi. Szalenie ważne jest, aby w procesie kształcenia kłaść nacisk na rozwijanie umiejętności wnioskowania, myślenia strategicznego, umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązywany problem oraz zdolności analitycznych.

Nauczanie matematyki w szkole powinno być dostosowane do konkretnego etapu rozwojowego i możliwości intelektualnych uczniów. Stąd tak ważne jest, aby nauczyciel potrafił trafnie określić poziom kompetencji matematycznych uczniów.

Świadomość tego, że jeden uczeń, rozwiązując problem za pomocą wyrażeń arytmetycznych w swoich obliczeniach, posiłkuje się ilustracją graficzną, inny rozwiązuje to samo zadanie, stosując metodę prób i błędów, a jeszcze inny sprawnie posługuje się takimi narzędziami jak równanie czy układ równań wymusza na nauczycielu konieczność indywidualizacji procesu nauczania i stosowania różnych metod nauczania na lekcjach.

Uczniowi powinno się stworzyć warunki, by mógł on podczas aktywności matematycznej wykorzystywać – adekwatne dla swojego poziomu percepcyjnego – kompetencje kluczowe w zakresie:
- analizowania zadań z treścią (adekwatnych do kompetencji matematycznych)
- czytania symboli matematycznych
- myślenia matematycznego (odkrywania strategii rozwiązania problemu).

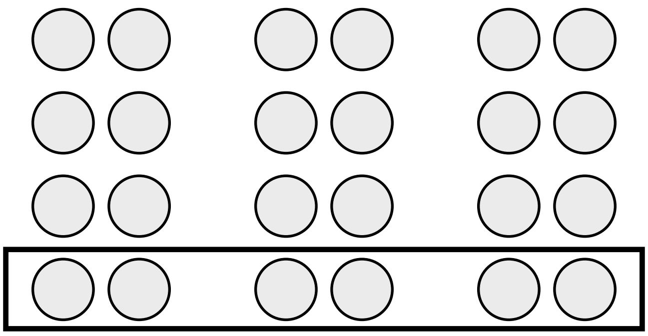
Różnorodność sposobów rozwiązań zadania

Praca na lekcji może polegać na rozwiązywaniu zadań, jednego po drugim, typowymi metodami. Można też poprosić uczniów o zaprezentowanie rozwiązania zadania dwoma czy trzema różnymi sposobami – na pewno wymusi to niestandardowe podejście do poruszanego zagadnienia. Można też, rozwiązując proste zagadnienie, wymusić lub też zasugerować pewną drogę myślenia.

Przy rozwiązywaniu następującego zadania:

Gdyby wszystkich uczniów klas ósmych pewnej szkoły podzielono na grupy 6-osobowe, to powstałyby o 3 grupy więcej niż gdyby podzielono ich na grupy 8-osobowe. Ilu uczniów klas ósmych jest w tej szkole?

można poprosić uczniów o wykorzystanie w rozwiązaniu poniższego rysunku.



Na pewno wymusi to niestandardowe podejście do problemu. Trzeba także zachęcać uczniów do stosowania takich metod rozwiązania zadań, które są im bliskie. Warto prezentować na forum różne pomysły na rozwiązanie problemu – niektóre z nich mogą bowiem być źródłem inspiracji dla innych uczniów. Poniżej zamieszczono przykładowe sposoby rozwiązania zadania, o którym mowa powyżej.

Pierwszy sposób

x – liczba grup ośmioosobowych

x + 3 – liczba grup sześcioosobowych, które tworzyliby wszyscy uczniowie

8x – liczba uczniów w grupach ośmioosobowych

6(x + 3) – liczba uczniów w grupach sześcioosobowych

$8x = 6(x + 3)$

$x = 9$

Obliczamy, ilu uczniów klas ósmych jest w szkole:

$9 \cdot 8 = 72$

Odpowiedź: W szkole jest 72 uczniów klas ósmych.

Drugi sposób

x – liczba wszystkich uczniów klas ósmych

$\frac{x}{8}$ – liczba grup ośmioosobowych, które utworzyliby wszyscy uczniowie klas ósmych

$\frac{x}{6}$ – liczba grup sześcioosobowych, które utworzyliby wszyscy uczniowie klas ósmych

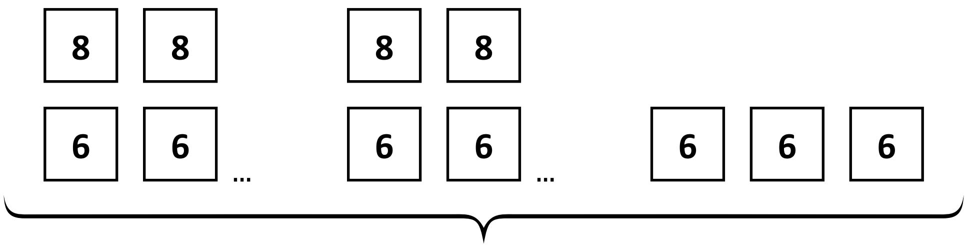
$$\frac{x}{8}+3=\frac{x}{6}$$

$x = 72$

Odpowiedź: W szkole jest 72 uczniów klas ósmych.

Trzeci sposób

Grupy ośmioosobowe utworzone przez wszystkich uczniów



Grupy sześcioosobowe utworzone przez wszystkich uczniów

Obliczamy, ilu uczniów byłoby w trzech sześcioosobowych grupach:

$3 \cdot 6 = 18$

Obliczamy, ile grup sześcioosobowych można byłoby dopełnić tymi uczniami, aby w każdej grupie było ośmioro uczniów:

$18 : 2 = 9$

Obliczamy, ilu uczniów jest w dziewięciu ośmioosobowych grupach:

$9 \cdot 8 = 72$

Odpowiedź: W szkole jest 72 uczniów klas ósmych.

Czwarty sposób (metoda prób i błędów)

Liczba grup ośmioosobowych	2	3	5	7	9	10
Liczba uczniów w tych grupach	16	24	40	56	72	80
Liczba grup sześcioosobowych	5	6	8	10	12	13
Liczba uczniów w tych grupach	30	36	48	60	72	78

Odpowiedź: W klasach ósmych jest 72 uczniów.

Piąty sposób (metoda prób i błędów)

Liczba uczniów musi być liczbą podzielną przez 6 i przez 8 (wspólne wielokrotności liczb 6 i 8): 24, 48, 72, 96, ….

Sprawdzamy, która z tych liczb spełnia warunki zadania:

dla 24 mamy: 24 : 6 = 4 i 24 : 8 = 3; różnica 4 – 3 = 1 nie spełnia warunków zadania

dla 48 mamy: 48 : 6 = 8 i 48 : 8 = 6; różnica 8 – 6 = 2 nie spełnia warunków zadania

dla 72 mamy: 72 : 6 = 12 i 72 : 8 = 9; różnica 12 – 9 = 3 spełnia warunki zadania

dla 96 mamy: 96 : 6 = 16 i 96 : 8 = 12; różnica 16 – 12 = 4 nie spełnia warunków zadania

Odpowiedź: W klasach ósmych jest 72 uczniów.

Należy uczniów zachęcać do stosowania różnych sposobów rozwiązania zadania. Proste zadanie[6]:

Na pływalni w marcu obowiązywała promocja.

Jednorazowe wejście
na pływalnię – 9 zł

PROMOCJA!!!

Co czwarte wejście gratis ☺

Wojtek był w marcu codziennie jeden raz na pływalni i wykorzystał wszystkie ulgi promocyjne. Ile kosztowało go korzystanie z pływalni w marcu? Zapisz obliczenia.

może być zrealizowane przez uczniów potrafiących uogólniać problem tak, jak poniżej:

Pierwszy sposób

Wojtek korzystał z gratisowego wejścia w następujących dniach marca: 4, 8, 12, 16, 20, 24 i 28, czyli 7 razy.

Wojtek zapłacił za 31 – 7 = 24 wejścia.

$24 \cdot 9 = 216$

Za korzystanie z pływalni przez cały marzec Wojtek zapłacił 216 zł.

[6] Źródło: Matematyka. Przykładowy arkusz egzaminacyjny CKE; *https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Arkusze_pokaz/Pokaz_arkusz_EO_1_matematyka.pdf*

Drugi sposób

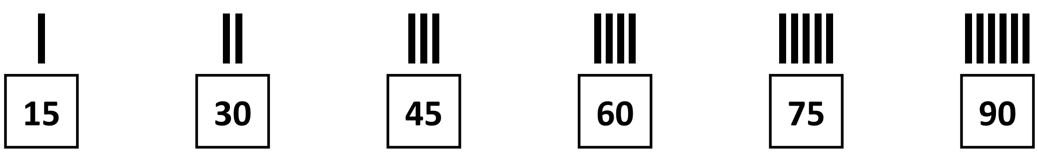
Wojtek korzystał z gratisowego wejścia w następujących dniach marca: 4, 8, 12, 16, 20, 24 i 28, czyli 7 razy.
Bez ulg promocyjnych Wojtek zapłaciłby 31 · 9 = 279 złotych.
Zniżki promocyjne, to kwota 7 · 9 = 63 złote.
279 – 63 = 216
Za korzystanie z pływalni przez cały marzec Wojtek zapłacił 216 zł.

Trzeci sposób

W cyklu 4 kolejnych dni Wojtek płacił po 9 zł za trzy wejścia na basen, a czwarte miał darmowe.
31 : 4 = 7 reszta 3
Wojtek zapłacił za 7 · 3 + 3 = 24 wejścia.
24 · 9 = 216
Za korzystanie z pływalni przez cały marzec Wojtek zapłacił 216 zł.

Natomiast przez ucznia niepotrafiącego uogólnić zadanego problemu zapis rozwiązania może polegać na wypisaniu po kolei wszystkich dni marca, zapisaniu przy każdym z nich kwot, jakie Wojtek będzie musiał zapłacić i na końcu obliczenia wartości wyrażenia 24 · 9. Wszystkie zaproponowane rozwiązania są poprawne. Ważne jest także to, że autor każdego z nich był zmotywowany do rozwiązania problemu.

Różnorodność czy też indywidualne podejście do zagadnienia można obserwować na każdej lekcji matematyki. Proste działanie 90 : 15 można rozwiązać na wiele różnych sposobów:

- 90 : 15 = (30 + 30 + 30) : 15 = 30 : 15 + 30 : 15 + 30 : 15 = 2 + 2 + 2 = 6
- 90 : 15 = 90 : 30 · 2 = 3 · 2 = 6
- 90 : 15 = 90 : 3 : 5 = 30 : 5 = 6
- 90 – 15 = 75
  75 – 15 = 60
  60 – 15 = 45
  45 – 15 = 30
  30 – 15 = 15
  15 – 15 = 0
  90 : 15 = 6
- 

W codziennej pracy na lekcji pamiętaj, że:

- warto zachęcać uczniów do stosowania takich technik rozwiązywania zadań, które są im bliskie
- należy umożliwiać uczniom prezentowanie własnych pomysłów na rozwiązanie zadania
- należy przedstawiać różne sposoby rozwiązywania zadań
- należy dostosować formy i metody pracy na lekcji do omawianego zagadnienia.

Gry i zabawy dydaktyczne

Nieodzownym elementem wpływającym na rozwój myślenia logicznego, przewidywania kolejnych kroków, stosowania strategii są gry. Powinny one zatem towarzyszyć uczniom w procesie kształcenia.

Na pozór łatwe zagadnienie może być pretekstem do kształtowania złożonych umiejętności. Sytuację taką obrazuje gra dydaktyczna w „kamienie".

Gra w „kamienie"
(gra dla 2 osób)

Przygotowanie gry:
1. Na jednym stosie ułóżcie 8 nakrętek, a na drugim 5.
2. Ustalcie osobę, która rozpocznie grę.

Przebieg gry:
Gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch w grze polega na wzięciu dowolnej liczby nakrętek **tylko** z jednego ze stosów.

Zakończenie gry:
Przegrywa ten, kto nie ma już możliwości wykonania ruchu.

Uczniowie muszą zrozumieć zasady gry i respektować je, a jednocześnie w przyjazny i atrakcyjny sposób mogą odkrywać jej strategię. W sytuacji takiej w naturalny sposób kształtowana jest umiejętność myślenia przyczynowo-skutkowego (np. poprzez planowanie, przewidywanie). Również na egzaminie mogą pojawiać się zadania, których celem będzie odkrycie strategii prowadzącej do rozwiązania przedstawionego problemu. Poniżej zaprezentowano przykładowe zadanie egzaminacyjne[7], które wymaga odkrycia strategii.

Ania i Jarek grali w kamienie. Na początku gry kamienie układa się w dwóch stosach. Następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Ruch w grze polega na wzięciu dowolnej liczby kamieni tylko z jednego ze stosów. Przegrywa ten, kto nie może już wykonać ruchu.

Na pewnym etapie gry pierwszy stos zmalał do jednego kamienia, a na drugim znajdowały się trzy kamienie. Ruch miała wykonać Ania. Uzasadnij, że aby zagwarantować sobie wygraną, Ania musiała wziąć dwa kamienie z drugiego stosu.

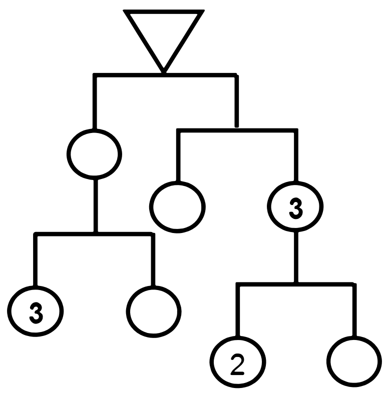
[7] Tamże.

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że słowny opis kolejnych kroków rozwiązania czy uzasadnienia jest wartościowy i może być w pełni poprawnym sposobem zapisu rozwiązania zadania.

Jedno z nowych i istotnych wymagań szczegółowych wpisanych w podstawie programowej w części dla klas IV–VI w dziale dotyczącym zadań tekstowych brzmi: [uczeń] 7) *układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązanym zadaniu*. Choć wymaganie to przypisane jest do klas IV–VI, to jak wiele innych wymagań zapisanych w podstawie programowej, może być sprawdzane na egzaminie.

Umiejętność taką można rozwijać na pozór prostymi zabawami, np. takimi jak poniższa.

Przedstawiona poniżej waga szalkowa jest w równowadze. Wszystkie masy podane są w kilogramach. Uzupełnij brakujące masy.



Warto kontynuować tę aktywność poprzez zachęcenie uczniów do zaprojektowania analogicznej zabawy.

Podczas lekcji można zainicjować również wiele innych aktywności, które poprzez modyfikację poruszanego zagadnienia, wymuszają jego wnikliwą analizę.

Można poprosić uczniów o modyfikację poniższego zadania tak, aby zapytać o masę pustego pojemnika.

Pusty pojemnik ma masę 0,4 kg, a wypełniony wodą po brzegi ma masę 1,8 kg. Z pojemnika tego odlano połowę objętości wody. Ile wynosi masa tego pojemnika wraz z pozostałą wodą?

Prowadzenie lekcji z wykorzystaniem gier i zabaw dydaktycznych umożliwia:

- naturalne wejście w świat symboli (kodowania informacji), umów, zasad, pojęć;
- rozwój myślenia przyczynowo-skutkowego (np. poprzez planowanie, przewidywanie);
- doskonalenie umiejętności matematycznych;
- kształtowanie odporności emocjonalnej (po porażce może być wygrana);
- kształtowanie umiejętności interpersonalnych.

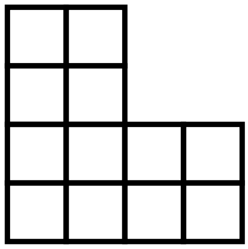
Zagadnienia geometryczne a myślenie abstrakcyjne

Doskonałym źródłem inspiracji dla nauczyciela do kształtowania u uczniów logicznego myślenia mogą stać się różne zagadnienia geometryczne. Niektóre zależności geometryczne można od razu zauważyć, a do innych wiedzie zawiła droga poprzez wnikliwą analizę kolejnych kroków przybliżających do celu. Stąd tak ważne jest myślenie nieszablonowe oraz umiejętność spostrzegania.

Do kształtowania takich umiejętności można np. wykorzystać figurę zbudowaną z 12 przystających kwadratów.

W sytuacji tej można kolejno prosić ucznia o wykonanie następujących poleceń:

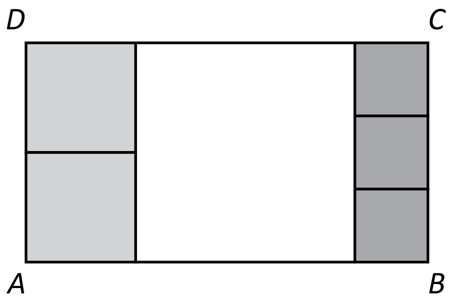
- podziel tę figurę na 3 przystające figury;
- podziel tę figurę na 4 przystające figury.



W następnym kroku rozważaną figurą powinien być kwadrat i polecenie: podziel tę figurę na 5 przystających figur. Sugestia płynąca z poprzedniego zadania zapewne sprawi, że nie każdy uczeń od razu zauważy możliwość podzielenia kwadratu na przystające figury za pomocą 4 odcinków równoległych do jednej pary boków kwadratu.

Podczas lekcji, przy analizie zadań geometrycznych, warto zachęcać uczniów do wykonania rysunku pomocniczego, wykorzystania rysunku będącego elementem zadania czy wykorzystania nożyczek i kartki papieru. Pomoże to im dostrzec pewne zależności, które ułatwią rozwiązanie zadań. Po takich doświadczeniach zadanie egzaminacyjne prezentowane poniżej[8] powinno okazać się atrakcyjne dla ucznia poszukującego poprawnego rozwiązania.

Prostokąt *ABCD* podzielono na 6 kwadratów: jeden duży, dwa średnie i trzy małe, jak na rysunku.



Uzasadnij, że pole powierzchni dużego kwadratu jest większe niż połowa powierzchni prostokąta *ABCD*.

[8] Źródło: *Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019*, Edyta Warzecha (CKE), Renata Świrko (OKE w Gdańsku), Iwona Łuba (OKE w Łomży), Sabina Pawłowska (OKE w Warszawie), prof. dr hab. Zbigniew Semadeni, Agnieszka Sułowska, Józef Daniel (CKE), dr Marcin Smolik (CKE); *https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/informatory/*

Uzasadnianie i wnioskowanie sprawdzane jest na egzaminie nie tylko w odniesieniu do zagadnień geometrycznych. Umiejętności te są również sprawdzane zadaniami dotyczącymi wykonywania działań na potęgach. Poniżej zamieszczono przykład takiego zadania.

Dane jest wyrażenie $\frac{2^7 \cdot 2^7}{2^7 + 2^7}$.

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 8? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	każdy z wykładników jest liczbą nieparzystą.
N	**Nie,**		**B.**	wykładnik potęgi 2^6 nie jest podzielny przez 8.
			C.	wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 2^3$.

Ważnym jest, aby przy omawianiu z uczniami tego typu zadań zwrócić im uwagę na fakt, iż wszystkie proponowane uzasadnienia są tutaj prawdziwe. Znalezienie zatem tego właściwego wymaga bardzo wnikliwej analizy omawianego problemu. Umiejętność uzasadniania i wnioskowania ściśle wiąże się z rozwojem myślenia abstrakcyjnego, które jest nieodłącznym elementem towarzyszącym realizacji wielu zagadnień czy wykonywaniu poleceń na lekcjach matematyki. Do poleceń tych zaliczamy np.:

- Wskaż cechy wspólne dla każdego trapezu i każdego równoległoboku.
- Opowiedz treść zadania swoimi słowami bez używania liczb.
- Spośród różnych figur wybierz te, które są czworokątami, a następnie posegreguj je według wybranych cech.
- Ułóż treść zadania tekstowego do przedstawionego działania (równania).

Wspomaganie rozwoju myślenia abstrakcyjnego jest ważnym działaniem nauczycieli matematyki. Trzeba zatem tak organizować proces kształcenia, aby było w nim jak najwięcej uogólniania, wyróżniania związków, wyróżniania podobieństw między przedmiotami, dostrzegania pierwszo- i drugorzędowych cech przedmiotów.

Aby wspomóc rozwój myślenia abstrakcyjnego, warto w procesie nauczania angażować jak najwięcej zmysłów. Warto to robić na każdym etapie kształcenia – nie tylko na lekcjach matematyki.

Twórcze rozwiązywanie zadań różnych typów. Jak rozwijać umiejętności matematyczne uczniów szkół podstawowych?

Znaczenie rozwiązywania zadań przy realizacji podstawy programowej

Rozwiązywanie z uczniami poszczególnych typów zadań, zbliżonych do tych, które uczeń znajdzie w arkuszu egzaminacyjnym, może pomóc nie tylko w dobrym przygotowaniu się do egzaminu ósmoklasisty, ale przede wszystkim w doskonaleniu umiejętności matematycznych, a także umiejętności przydatnych w życiu codziennym. Poniżej podajemy przykładowe propozycje wykorzystania zadań w procesie dydaktycznym. Realizowanie zapisanych w podstawie programowej celów ogólnych i szczegółowych może przebiegać równolegle z oswajaniem się ucznia z zadaniami typu egzaminacyjnego, przez doskonalenie umiejętności rozwiazywania zadań i komunikatywnego opisywania kolejnych kroków rozwiązania.

Wykorzystanie dystraktorów zadań zamkniętych

Wśród zadań zamkniętych w arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zadania wielokrotnego wyboru. Proponowane w nich niepoprawne odpowiedzi (dystraktory) wskazują najczęściej konkretne przyczyny błędów uczniowskich, niewłaściwe rozumienie analizowanych pojęć, nieprawidłową interpretację treści, przypisywanie rozważanym obiektom matematycznym nieodpowiednich własności.

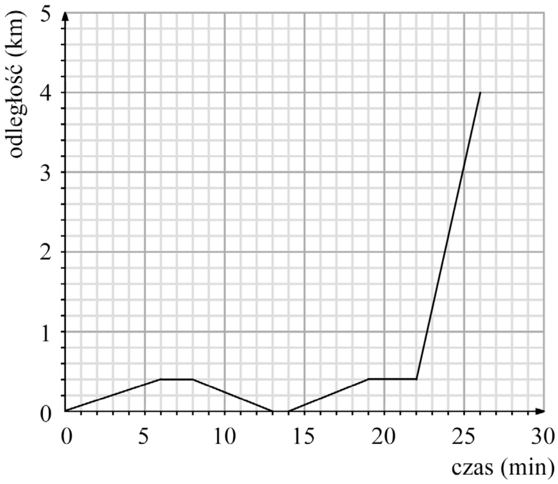
W przykładzie 1. przedstawiono zadanie sprawdzające umiejętność interpretacji danych, przedstawionych za pomocą wykresu. Jest to umiejętność zapisana w podstawie programowej w części dla klas VII i VIII, w dziale *XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej*. Zagadnieniom z tego działu podstawa programowa wyznacza szczególną rolę w kształceniu matematycznym, ze względu na powiązanie z życiem codziennym i możliwością zastosowania matematyki w praktyce. Operowanie wykresami zależności jest doskonałą okazją do umożliwienia uczniom intuicyjnego opanowania trudnych i abstrakcyjnych pojęć. Dzięki rozważaniu zagadnień statystycznych już w szkole podstawowej pojęcia takie jak funkcja, monotoniczność, ekstrema, będą na wyższym etapie edukacyjnym łatwiejsze do przyswojenia. Zagadnieniom z zakresu statystyki w podstawie programowej poświęcono obszerny komentarz, a sposób realizacji treści programowych zilustrowano przykładami.

Przykład 1.[9]

Mateusz mieszka w odległości 4 km od szkoły. Część drogi do szkoły pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, a następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, stwierdził, że zapomniał zabrać zeszyt,

[9] *Źródło: Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019,* Edyta Warzecha (CKE), Renata Świrko (OKE w Gdańsku), Iwona Łuba (OKE w Łomży), Sabina Pawłowska (OKE w Warszawie), prof. dr hab. Zbigniew Semadeni, Agnieszka Sułowska, Józef Daniel (CKE), dr Marcin Smolik (CKE); *https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/informatory/*

więc wrócił po niego do domu. Wykres przedstawia, jak tego dnia zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Od momentu, gdy Mateusz zawrócił z przystanku do domu, do momentu, gdy dotarł ponownie na przystanek, upłynęło

A. 11 minut **B.** 13 minut **C.** 14 minut **D.** 16 minut

Oto pochodzenie dystraktorów w rozważanym przykładzie. Odpowiedź B – niepoprawne doliczenie do właściwego czasu dwóch minut pobytu na przystanku, przed podjęciem decyzji o powrocie do domu; odpowiedź C – doliczenie do właściwego czasu trzech minut oczekiwania na autobus po powrocie na przystanek; odpowiedź D – doliczenie do właściwego czasu pięciu minut z obu pobytów na przystanku.

Łatwo zauważyć, że fałszywe odpowiedzi są konsekwencją niewłaściwej interpretacji treści zadania lub niepoprawnego odczytania informacji przedstawionych na wykresie, przy czym za każdym razem można odtworzyć, jaki błąd popełnił uczeń.

W przedstawionym poniżej przykładzie 2. uczeń musi wykazać się sprawnością rachunkową w zakresie działania na potęgach.

Przykład 2.[10]

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $2^3 \cdot 3^2$ jest równa **A / B**.
A. 36 **B.** 72
Wartość wyrażenia $5^3 - 5^2$ jest równa **C / D**.
C. 5 **D.** 100

[10] *Źródło: Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019... .*

Tym razem dystraktor A – oznacza brak umiejętności potęgowania, a konkretnie wykonywanie mnożenia zamiast potęgowania. Z kolei dystraktor C oznacza brak umiejętności stosowania własności potęgowania i błędne zastosowanie przy odejmowaniu potęg odejmowania wykładników (lub również mnożenie zamiast potęgowania). Błędne rozwiązanie zadania przez ucznia jest sygnałem dla nauczyciela, świadczącym o braku zrozumienia istoty potęgowania lub jego własności. Taka łatwa do przeprowadzenia analiza może zainspirować nauczyciela do poszukiwania nowych metod przekazywania treści nauczania, które uczniowie nieprawidłowo interpretowali.

Przykład 3. to zadanie dotyczące zależności między prędkością, drogą i czasem. Podstawa programowa z matematyki dla szkoły podstawowej kładzie duży nacisk na zastosowanie umiejętności matematycznych w praktyce. Stosowanie modeli matematycznych do analizy zjawisk z życia codziennego dobrze wpisuje się w realizację takiego podejścia do matematyki w szkole.

Przykład 3.[11]

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Jacek i Ola testują swoje elektryczne deskorolki. W tym celu zmierzyli czasy przejazdu na trasie 400 m. Ola pokonała tę trasę w czasie 160 s, a Jacek – w czasie 100 s.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Różnica średnich prędkości uzyskanych przez Jacka i przez Olę jest równa

A. $1{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **B.** $5{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **C.** $9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **D.** $14{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Tu dobrą odpowiedzią jest B. Pochodzenie dystraktorów jest następujące: A – obliczenia prowadzone są w m/s, a odpowiedź, z tym samym wynikiem liczbowym, podana jest w km/h; C – poprawnie obliczona jest średnia prędkość Oli, ale nie różnica prędkości; D – poprawnie obliczona jest średnia prędkość Jacka, ale nie różnica prędkości.

Zadanie jest doskonałą okazją do uświadomienia uczniom, jak unikać błędów, powstałych na skutek nieprecyzyjnego odczytania sformułowania lub pomijania istotnego w praktyce ustalenia jednostek wielkości, którymi się operuje.

Rozwiązywanie z uczniami zadań zamkniętych pozwala nauczycielom zdiagnozować, czym kierowali się uczniowie przy rozwiązywaniu zadania. Dzięki zdobytej w ten sposób informacji nauczyciel może pomóc uczniom w wyeliminowaniu błędnego pojmowania konkretnych treści i zaplanować działania naprawcze, prowadzące do właściwej interpretacji pojęć i własności.

[11] *Źródło: Matematyka. Przykładowy arkusz egzaminacyjny CKE; https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Arkusze_pokaz/Pokaz_arkusz_EO_1_matematyka.pdf*

Stymulowanie rozumowania i uczenie opisu kolejnych kroków rozwiązania to kolejna korzyść jaka płynie z rozwiązywania zadań zamkniętych, na przykład przez otwieranie. Ważne jest, aby uczniowie, którzy nie potrafią wyrazić precyzyjnie w języku matematycznym swojego rozwiązania, otrzymali w tym zakresie odpowiednie wsparcie od nauczyciela. Rolą nauczyciela jest tak ukierunkować działania uczniów, aby potrafili oni swoje rozwiązanie opisać w sposób zrozumiały dla innych.

Przykład 4.[12]

W każdej z dwóch torebek znajdują się 32 cukierki: 17 pomarańczowych, 10 jabłkowych i 5 truskawkowych.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do pierwszej torebki należy włożyć **A / B** cukierki truskawkowe, aby wszystkie znajdujące się w niej cukierki truskawkowe stanowiły 25% wszystkich cukierków w torebce.

A. 3 **B.** 4

Liczba cukierków pomarańczowych, które należy wyjąć z drugiej torebki, aby wśród pozostałych w niej cukierków było 40% pomarańczowych, jest **C / D**.

C. mniejsza niż 5 **D.** większa niż 5

Uczniowie, rozwiązując zaproponowane wyżej zadanie zamknięte, mogą zastosować różne metody, zarówno te odwołujące się do myślenia abstrakcyjnego, jak i te, które wykorzystują jedynie konkretne obiekty. Przedstawiamy tutaj dwa odmienne sposoby rozwiązania pierwszej części zadania.

[12] *Źródło: Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019... .*

Rozwiązanie 4/1

(32 + x) to 100% wielkości

(5 + x) to 25% wielkości

$$5 + x = \frac{1}{4}(32 + x)$$

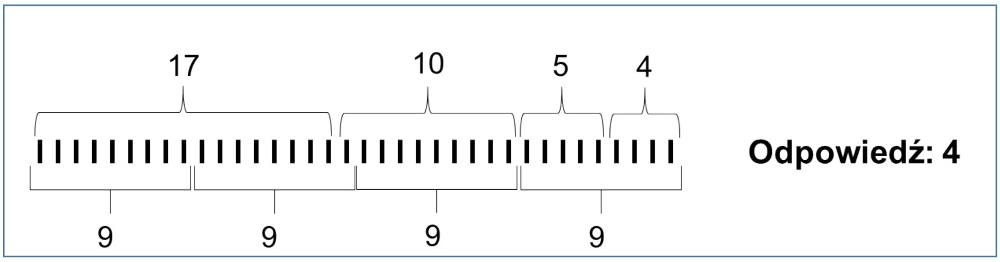
$$20 + 4x = 32 + x$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Odpowiedź: 4.

Rozwiązanie 4/2



Dzięki zaproponowanym przez uczniów różnym sposobom uzasadniania odpowiedzi, nauczyciel uzyskuje istotną informację o poziomie kompetencji matematycznych poszczególnych uczniów. Realizacja kolejnych kroków rozwiązania przy użyciu równań i wprowadzenie do opisu oznaczeń literowych wskazują na umiejętność myślenia abstrakcyjnego, a w szczególności na umiejętność tworzenia modelu algebraicznego. Z kolei posługiwanie się liczmanami, prowadzenie rachunków przez zliczanie pojedynczych obiektów – może oznaczać, że uczniowie ci mogą jeszcze być na etapie myślenia konkretnego. Zdobyta w ten sposób wiedza o uczniach pozwala nauczycielom na lepszy dobór metod pracy z uczniami.

Wśród wymagań, które wyznaczają cele kształcenia, realizowane na lekcjach matematyki w klasach IV-VIII, podstawa programowa przewiduje poszukiwanie analogii, dostrzeganie podobieństw i regularności. Rozważmy przykładowe zadanie zamknięte typu prawda-fałsz, które sprawdza przede wszystkim sprawność rachunkową, ale wymaga też innych umiejętności.

Przykład 5.[13]

Za 30 dag orzechów pistacjowych zapłacono 15,75 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Za 40 dag tych orzechów należy zapłacić 21 zł.	**P**	**F**
Cena 1 kg tych orzechów jest równa 52,50 zł.	**P**	**F**

Przy rozwiązaniu tego zadania nauczyciel może pomóc uczniom przez zadawanie pytań dodatkowych, naprowadzających na drogę poszukiwania odpowiedzi, np. *ile kosztuje 10 dag orzechów?*, *ile dekagramów ma kilogram?*

Po omówieniu rozwiązania zadania nauczyciel może inspirować uczniów do dalszej pracy w kierunku uogólnienia rozważanego problemu poprzez stawianie pytań poszerzających zagadnienie, np. *Ile kosztuje 20 dag orzechów?*, *Ile trzeba zapłacić za 5 kg tych orzechów?*, *Ile trzeba zapłacić za n kg tych orzechów?*

Rozwiązywanie przez uczniów zadań zamkniętych może być doskonałą okazją do kształcenia umiejętności poszukiwania analogii, dostrzegania podobieństw i regularności. Celem nauczania matematyki jest wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych oraz rozwinięcie umiejętności wnioskowania. Dlatego też, przy rozwiązywaniu zadań zamkniętych, nauczyciel powinien pamiętać o doskonaleniu umiejętności takich, jak uogólnianie czy dobór i stosowanie algorytmów. Poszukiwanie analogii i regularności sprzyja kształtowaniu wspomnianych umiejętności. Może też okazać się istotne podczas zachęcania uczniów do podejmowania prób analizy zagadnień postrzeganych jako trudne.

Powyższe przykłady zadań zamkniętych i propozycje ich wykorzystania w procesie dydaktycznym są wartościowe i stwarzają możliwość doskonalenia ważnych umiejętności. Dają one możliwość rozwiązywania nieskomplikowanych, na ogół, problemów, wymagających prostych operacji. Warto podkreślić, że dogłębna analiza zadań zamkniętych nie tylko wskazuje na rodzaje i przyczyny błędów popełnianych przez uczniów, ale także daje możliwość odkrywania różnych sposobów rozwiązania takich zadań i poszukiwania różnych dróg do znalezienia odpowiedzi. Dla nauczycieli szczególnie ważny jest fakt, że mogą one pomóc w doborze trafnych metod pracy dostosowanych do możliwości poznawczych uczniów.

[13] Tamże.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi a wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Podstawa programowa z matematyki w szkole podstawowej wymienia wśród wymagań ogólnych: używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi oraz dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji i budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Do realizacji wymienionych powyżej wymagań dobrym narzędziem są zadania otwarte krótkiej odpowiedzi. Najczęściej rozwiązanie takiego zadania wymaga zastosowania właściwego modelu matematycznego i jest doskonałą okazją do wykazania się poprawną interpretacją pojęć matematycznych. Znalezienie odpowiedzi nie wymaga prowadzenia kilkuetapowego rozwiązania ani wykonywania ciągu obliczeń.

Rozważmy przykład zadania, wymagającego interpretacji pojęcia *procent*.

Przykład 6.[14]

W klasie Janka jest 30 uczniów. Co trzeci uczeń z tej klasy to chłopiec. Rodzeństwa nie ma 20% liczby dziewcząt z tej klasy. Ile dziewcząt z klasy Janka nie ma rodzeństwa?

Uczniowie mają okazję zaprezentować swoją interpretację, czym jest 20% liczby oraz zastosowanie obliczeń procentowych. Nauczyciel może, dzięki analizie rozwiązań uczniowskich, rozpoznać, czy uczniowska interpretacja pojęcia jest właściwa. Uczniowie mogą poszukiwać odpowiedzi różnymi drogami, ale na podstawie zapisu rozwiązania nauczyciel z łatwością ustali, czy uczeń prawidłowo interpretuje pojęcie w zadanym kontekście.

Oto 3 rozwiązania uczniowskie powyższego zadania.

Rozwiązanie 1.

30 : 3 = 10 (chłopców)

20 dziewczyn

20 ———— 100%

x ———— 20%

$x = \frac{20 \cdot 20}{100} = 4$

Odpowiedź: 4 dziewczyny z klasy Janka nie mają rodzeństwa.

[14] Tamże.

Rozwiązanie 2.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

I CH (1), II CH (4), III CH (7), IV CH (10), V CH (13)

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

VI CH (16), VII CH (19), VIII CH (22), IX CH (25), X CH (28)

30 – 10 = 20 (dziewczyn)

20 $\longrightarrow$ 100%

4 $\longrightarrow$ 20%

Odpowiedź: Rodzeństwa nie mają 4 dziewczynki.

Rozwiązanie 3.

$$\begin{array}{rrrcrr} & 1 & 0 & & & \\ \hline & 3 & 0 & : & 2 & 0 \\ - & 2 & 0 & & & \\ \cline{1-3} & 1 & 0 & & & \\ - & 2 & 0 & & & \\ \cline{1-3} & & 0 & & & \end{array}$$

Odpowiedź: W Janka klasie 20% dziewcząt nie ma rodzeństwa.

W rozwiązaniu 1. uczeń poprawnie wykonuje obliczenia procentowe z wykorzystaniem proporcji. Można zatem powiedzieć, że dobrał przydatny algorytm. W rozwiązaniu 2. widać, że do interpretacji sformułowania „co trzeci" uczeń potrzebował wsparcia w postaci wypisania kolejnych liczb naturalnych od 1 do 30, natomiast w dalszej części przedstawił poprawną interpretację pojęcia 20% jako piątej części. Rozwiązanie 3. – to ilustracja przypadkowego operowania na liczbach z zadania, bez związku z treścią, świadczące o niezrozumieniu przez ucznia treści zadania, a przede wszystkim pojęcia procent.

Dzięki rozwiązywaniu zadań krótkiej odpowiedzi nauczyciel jest w stanie ustalić, czy uczniowie dobrze interpretują pojęcia, czy bez trudności operują obiektami matematycznymi. Jak widać na załączonych przykładach zrozumienie istoty pojęć matematycznych może być sprawdzane niezależnie od kompetencji matematycznych.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi a komunikatywność opisu kolejnych kroków rozwiązania zadania

Funkcjonowanie w społeczności wymaga umiejętności komunikowania się, a w szczególności jest związane z koniecznością używania wspólnego języka i właściwego rozumienia używanych pojęć. Różne dziedziny działalności ludzi wymagają stosowania fachowych określeń. Niezwykle ważną umiejętnością, zapisaną w podstawie programowej z matematyki, jest używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników. Uczniowie muszą mieć świadomość, że komunikatywne zaprezentowanie rozwiązania zadania jest bardzo istotne i decyduje o wartości rozwiązania. Najlepszy pomysł, który nie zostanie dobrze przedstawiony, nie będzie doceniony, bo nie będzie zrozumiały. Uczeń kończący naukę w szkole podstawowej powinien mieć świadomość, że stosowanie niepoprawnego języka przy opisie zagadnienia jest błędem, który wyklucza poprawność rozwiązania problemu.

Dobrą okazją do doskonalenia umiejętności używania języka matematycznego jest zapisywanie rozwiązań zadań rozszerzonej odpowiedzi. Często wymagają one bowiem opisu kilkuetapowego działania, wnioskowania, wykorzystania własności rozważanych obiektów. Precyzja określeń i dobór właściwych sformułowań mogą decydować o wartości rozwiązania oraz uzyskanym wyniku.

Rozważmy przykładowe zadanie rozszerzonej odpowiedzi.

Przykład 7.[15]

W tabeli podano wybrane informacje na temat dwóch rodzajów herbat, które pije rodzina Nowaków.

Rodzaj opakowania	Zawartość opakowania	Cena opakowania	Ilość herbaty potrzebna do zaparzenia jednego kubka naparu
Herbata w torebkach	50 torebek	8,50 zł	1 torebka
Herbata sypka	50 g	5,00 zł	2 g

Rodzina wypija dziennie średnio 12 kubków herbaty i zamierza kupić możliwie najmniejszą liczbę opakowań herbaty jednego rodzaju, aby wystarczyło jej na 30 dni. Oblicz koszt zakupu herbaty sypkiej oraz koszt zakupu herbaty w torebkach. Zapisz obliczenia.

Przeanalizujmy przykładowe rozwiązanie tego zadania.
Herbata w torebkach:
$8{,}50 : 50 = 0{,}17$ [zł/1 torebkę]
$0{,}17 \cdot 30 \cdot 12 = 61{,}20$ [zł]

[15] *Źródło: Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019... .*

61,20 : 8,50 = 7,2
Na 30 dni trzeba kupić 8 opakowań.
8 · 8,50 = 68 [zł]
Herbata sypka:
5 : 50 = 0,10 [zł/1g]
0,10 · 30 · 12 · 2 = 72 [zł]
72 : 5 = 14,4
Na 30 dni trzeba kupić 15 opakowań.
15 · 5 zł = 75 zł
Odpowiedź: Za herbatę w torebkach trzeba zapłacić 68 zł, a za herbatę sypką 75 zł.

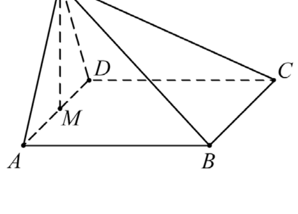
Nauczyciel powinien zwrócić uwagę uczniom na konieczność zamieszczania komentarzy i określania efektów poszczególnych kroków rozwiązania. Nie muszą to być rozbudowane zapisy, ale tak, jak w przykładzie, krótka informacja o wielkościach otrzymanych w wyniku działań i wnioski, które pozwalają kontynuować rozwiązanie. W przykładowym rozwiązaniu zapisano wnioski o liczbach opakowań, które trzeba kupić, wyznaczonych przez zaokrąglenie wyników w górę.

Kształtowanie właściwego rozumienia pojęć i doskonalenie umiejętności planowania rozwiązania wieloetapowego

Wiele zapisów podstawy programowej podkreśla konieczność kształtowania umiejętności właściwego rozumienia pojęć. Na przykład zapisy „uczeń rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe” czy „oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe” należy rozumieć jako wskazanie, że pojęcia graniastosłupów i ostrosłupów muszą być wprowadzane z wykorzystaniem różnorodnych przykładów. W szczególności wyobrażenie o tych bryłach musi obejmować nie tylko przypadki brył prostych czy brył prawidłowych. Rozważmy przykład zadania zapisanego w podstawie programowej.

Przykład 8.[16]

Prostokąt *ABCD* jest podstawą ostrosłupa *ABCD*S, punkt *M* jest środkiem krawędzi *ADS*, odcinek *MS* jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: *AD* = 10 cm, *AS* = 13 cm oraz *AB* = 20 cm. Oblicz objętość ostrosłupa.



[16] *Źródło: Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Matematyka.*

W zadaniu rozważany jest ostrosłup, który nie jest prawidłowy. Rozwiązanie będzie składać się z kilku etapów. Po rozwiązaniu zadania warto poprosić uczniów o ich wskazanie. Następnie można wspólnie ustalić, od których czynności można rozpocząć rozwiązywanie zadania. Ważne jest uświadomienie uczniom, że niektóre kroki wymagają zamieszczenia komentarza. Kolejnym punktem prowadzonej z uczniami analizy może być ustawienie czynności potrzebnych do realizacji rozwiązania w sekwencję następujących po sobie kroków. Przedstawiona tu sytuacja dydaktyczna może pomóc uczniom w doskonaleniu umiejętności planowania działania, a ponadto może przekonać ich do tego, by do rozwiązania dobrać taką strategię, która w pierwszej kolejności pozwala wykorzystać umiejętności opanowane najlepiej.

Przykładowe efekty pracy z uczniami w omawianym przykładzie mogą wyglądać tak.
Aby rozwiązać zadanie należy:
- <u>ustalić długość odcinka AM</u>
- *ustalić, że trójkąt AMS jest prostokątny*
- zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie *AMS*
- obliczyć wysokość ostrosłupa
- <u>obliczyć pole podstawy ostrosłupa</u>
- <u>ustalić sposób obliczenia objętości ostrosłupa</u>
- obliczyć objętość ostrosłupa.

Czynności, z których każda może być wykonana w pierwszej kolejności, podkreślono. Kursywą zaznaczono tę czynność, która może być wykonana jako pierwsza, ale wymaga stosownego komentarza.

Wykorzystanie rysunków przy rozwiązywaniu zadań

Podstawa programowa z matematyki dla szkoły podstawowej podkreśla znaczenie kształtowania umiejętności matematycznych, które mają ułatwić funkcjonowanie w konkretnych sytuacjach życiowych, wymagających rozwiązywania typowych i nietypowych problemów. W szczególności ważne są umiejętności podejmowania właściwych decyzji, organizacji własnych działań czy precyzyjnego porozumiewania się. W komentarzu do podstawy programowej wskazano wśród celów ogólnych wyrobienie u uczniów intuicji matematycznych i zdolności analitycznych oraz myślenia strategicznego. Jak zatem zachęcić uczniów, by podejmowali działanie w sytuacji, kiedy nie dostrzegają oni podobieństwa do sytuacji już znanych lub nie potrafią dobrać strategii postępowania?

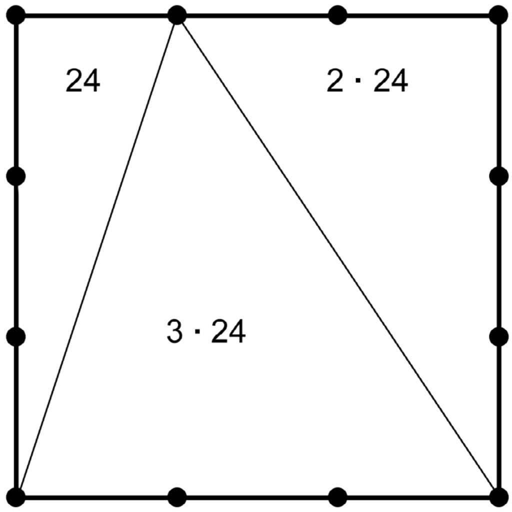
Przy rozwiazywaniu zadań matematycznych warto zaproponować ilustrowanie treści zadania i to nie tylko w przypadku zagadnień geometrycznych, ale także wtedy, gdy zrozumienie rozważanej sytuacji lub poszukiwanie sposobu rozwiązania staje się wyzwaniem.

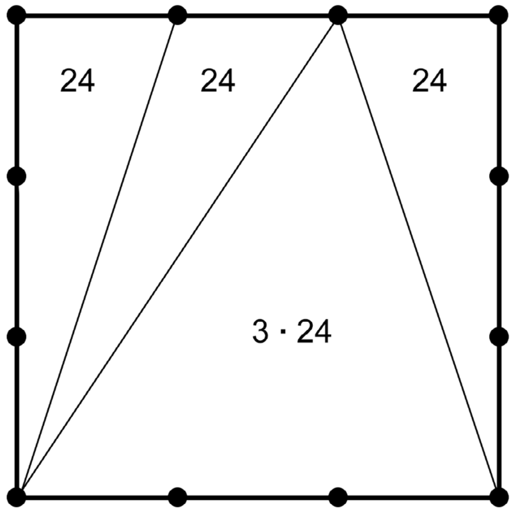
W przypadku zadań geometrycznych rysunek jest często częścią rozwiązania lub wręcz istotą pomysłu na znalezienie odpowiedzi.

Przykład 9.[17]

Bok *CD* kwadratu *ABCD* podzielono punktami *E* i *F* na trzy odcinki równej długości. Przez wierzchołek *A* kwadratu i przez punkt *E* poprowadzono prostą. Pole trójkąta *AED* wynosi 24 cm2. Oblicz pole kwadratu *ABCD*. Zapisz obliczenia.

Do rozwiązania zadania wystarczy odpowiednio podzielić kwadrat na figury, których pole będzie łatwe do ustalenia, dzięki właściwemu rozumieniu wzoru na pole trójkąta. Oto dwa z możliwych rysunków ułatwiających rozwiązanie zadania.





Podjęcie próby uzupełnienia rysunku o odcinki dzielące figurę na trójkąty, których pole jest łatwe do ustalenia, dla wielu uczniów może okazać się doskonałym sposobem nie tylko na rozwiązanie zadanie, ale i na zrozumienie istoty zależności między polami figur.

Warto równocześnie uświadomić uczniom, że pełne rozwiązanie zadania wymaga zapisania stosownego komentarza. Na przykład o tym, że pola trójkątów o takich samych podstawach i takich samych odpowiadających im wysokościach są równe oraz o tym, że trzykrotne wydłużenie podstawy trójkąta trzykrotnie zwiększa jego pole.

Rysunki mogą być wykorzystywane także przy rozwiązywaniu zagadnień spoza geometrii, na przykład jako etap poprzedzający zapisanie równania lub przy obliczeniach czasowych.

[17] *Źródło: Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019... .*